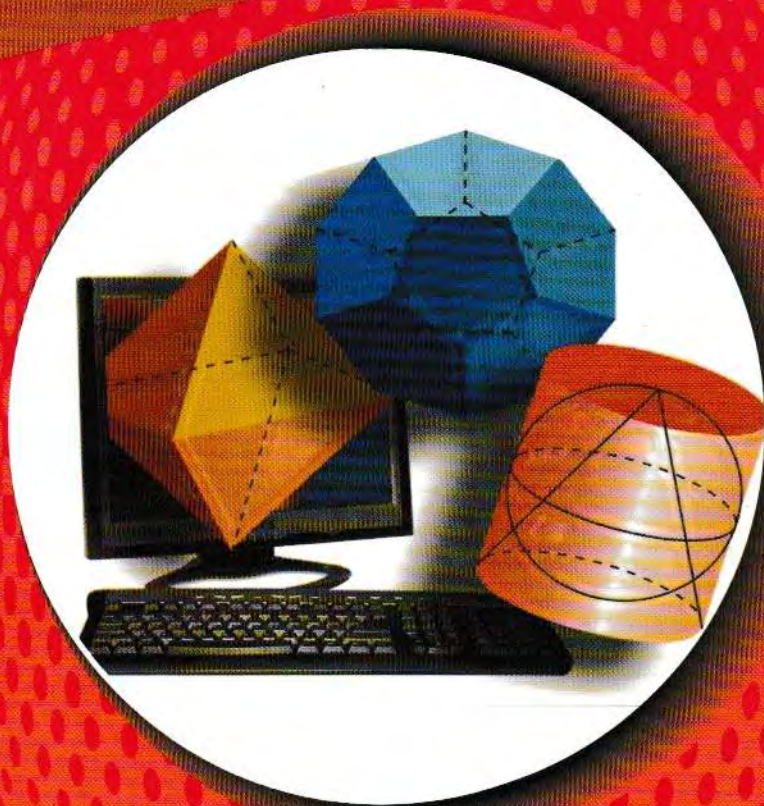


9

Poliedros

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXÁMENES DE ADMISIÓN

Luis Lazo Gutierrez

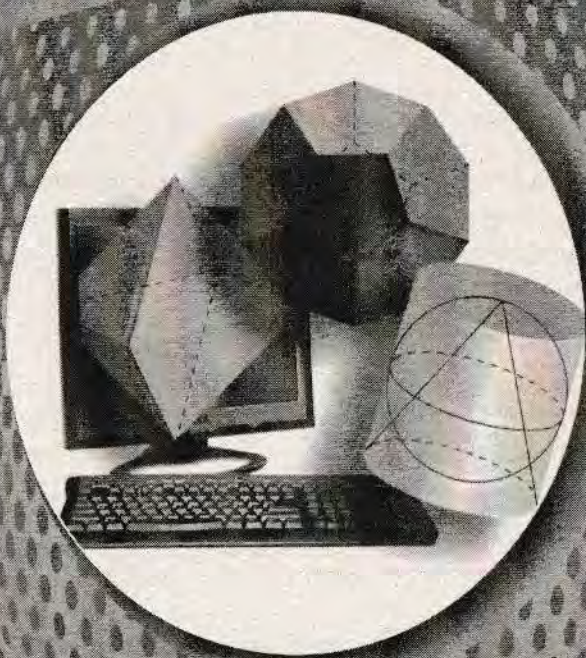
FONDO EDITORIAL
RODO

9

Poliedros

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Luis Lazo Gutierrez

FONDO EDITORIAL
AROD



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

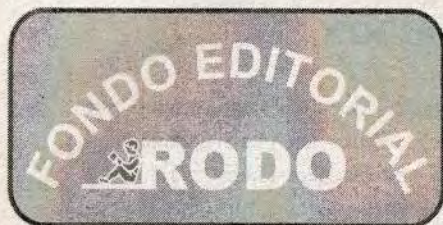
Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2015, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresos que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO

De: Walter Z. Benítez Nuñez.



GEOMETRÍA- TEMA SELECTO 09, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Marzo 2015 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2015 - 03779

EQUIPO PEDAGÓGICO

Luis Lazo Gutiérrez

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

Víctor Meneses Huamán

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

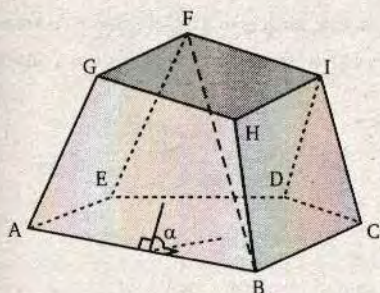
POLIEDROS

Se llama superficie poliédrica a la superficie no plana determinada por la reunión de cuatro o más regiones poligonales planas no coplanares de modo que cualquier par de regiones poligonales, llamadas caras, tienen en común a lo más un lado llamado arista. Un poliedro es la reunión de una superficie poliédrica con todos sus puntos interiores.

Se llaman ángulos diedros del poliedro a los determinados por las caras que tienen una arista común.

Se llama diagonal de un poliedro al segmento de recta que une dos vértices no situados en una misma cara.

Por área de un poliedro se entiende la suma de las áreas de todas sus caras, y por volumen de un poliedro la porción de espacio que ocupa el mismo.



ELEMENTOS:

Vértice	: A, B, C, ...
Aristas	: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$
Caras	: AGHB, CDI, ...
Diedros	: Diedro $\overline{AB}$, ...
Diagonales	: $\overline{FB}$, $\overline{AI}$, ...

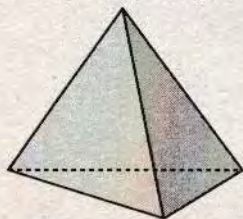
CLASIFICACIÓN DE LOS POLIEDROS

Atendiendo al número de caras un poliedro se llama:

Tetraedro,	si tiene 4 caras
Pentaedro,	si tiene 5 caras
Hexaedro,	si tiene 6 caras

Octaedro,	si tiene 8 caras
Dodecaedro,	si tiene 12 caras
Icosaedro,	si tiene 20 caras

En general se dice poliedro de siete, nueve, diez, ... caras. Sin embargo, hay algunos poliedros que toman nombres especiales, como *prisma*, *pirámide*, etc.

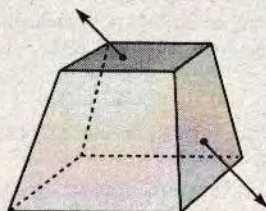
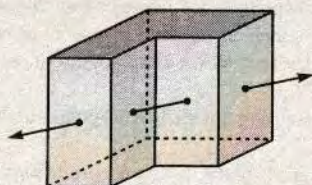


Tetraedro

En la figura se muestra un tetraedro, el poliedro de menor número de caras.

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 09

Un poliedro será convexo si una recta secante a su superficie determina en ella sólo dos puntos de intersección. Si la recta secante determina en la superficie poliédrica más de dos puntos de intersección, poliedro será no convexo.

**Poliedro convexo****Poliedro no convexo****TEOREMA DE EULER**

En todo poliedro convexo el número de caras aumentado en el de vértices es igual al número de aristas más 2. Si "C", "V" y "A" son los números de caras, de vértices y de aristas respectivamente de un poliedro convexo, entonces se cumple:

$$C + V = A + 2$$

TEOREMAS

1. El número de aristas de cualquier poliedro es igual a la mitad del número total de lados de todas las caras. Es decir si un poliedro esta limitado por "x" polígonos de "n" lados, "y" polígonos de "m" lados y "z" polígonos de "r" lados, entonces, si "A" es el número de aristas, se cumple:

$$A = \frac{x \cdot n + y \cdot m + z \cdot r}{2}$$

2. La suma "S" de las medidas de los ángulos de todas las caras de un poliedro convexo, esta dada por la siguiente expresión:

$$S = 360 (A - C)$$

Sabemos por el Teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$V - 2 = A - C$$

Luego:

$$S = 360 (V - 2)$$

3. Número de diagonales del poliedro (ND):

$$ND = C_2^V - A - \text{\# diagonales de las caras}$$

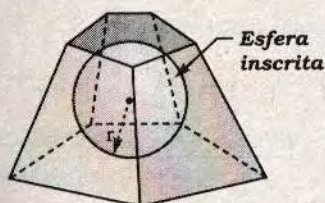
$$C_2^V = \frac{|V|}{|V| - 2} \cdot |V| = \frac{V(V - 1)}{2}$$

4. Número de aristas (A):

n: # de lados que las caras tienen.

$$A = \frac{n \cdot C}{2}$$

5. Volumen de un poliedro circunscrito a una esfera.



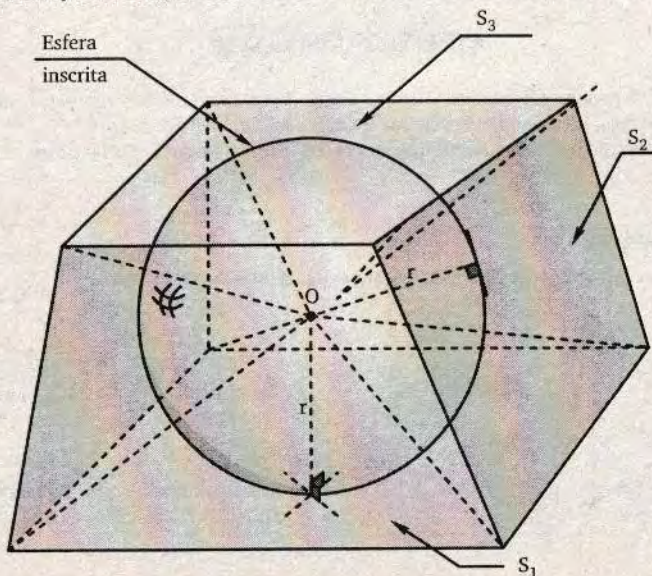
$$V_p = \frac{(S_{T_p}) \cdot (r)}{3}$$

V_p : Volumen del poliedro

S_{T_p} : Área total del poliedro

r : Radio de la esfera inscrita

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL VOLUMEN DEL POLIEDRO CIRCUNSCRITO A UNA ESFERA, EN FUNCIÓN DE SU ÁREA Y EL RADIO DE LA ESFERA INSCRITA



Datos: Radio de la esfera inscrita: " r ".
 Área total del Poliedro: " S_{Tp} ".
 Volumen del Poliedro: " V_p "

Por demostrar:
$$V_p = \frac{(S_{Tp}) \cdot (r)}{3}$$

- Se une el centro de la esfera con los vértices del poliedro.
- Sean las áreas de las caras: $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n$.
- Se trazan perpendiculares del centro de la esfera a las caras que miden " r " cada uno.
- El Poliedro está determinado por pirámides cuyas bases son de áreas $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n$ y sus respectivas alturas miden " r ".

Luego:
$$V_{(\text{Poliedro})} = \frac{S_1 \cdot r}{3} + \frac{S_2 \cdot r}{3} + \frac{S_3 \cdot r}{3} + \dots + \frac{S_n \cdot r}{3}$$

$$V_{(\text{Poliedro})} = \frac{(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) \cdot r}{3}$$

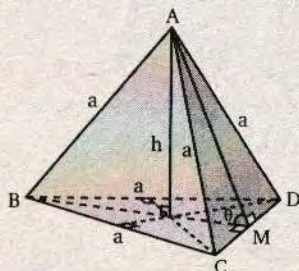
$$\therefore V_p = \frac{(S_{Tp}) \cdot (r)}{3}$$

POLIEDROS REGULARES

Se llama poliedro regular al poliedro convexo cuyas caras son regiones limitadas por polígonos regulares congruentes, además en cada vértice concurren igual número de aristas. Hay solamente cinco poliedros regulares, que son: el tetraedro, el hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Tetraedro regular

Está limitado por cuatro regiones triangulares equiláteras unidas de tres en tres.



$$\begin{cases} C = 4 \\ V = 4 \\ A = 6 \end{cases}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

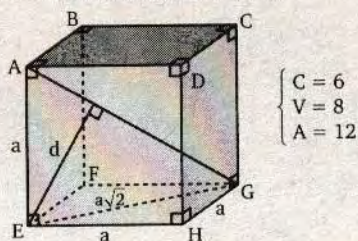
$$S_{\text{Total}} = a^2\sqrt{3}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Volumen} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Hexaedro regular (cubo)

Esta limitado por seis regiones cuadradas unidas de tres en tres.



AG: Diagonal

$$AG = a\sqrt{3}$$

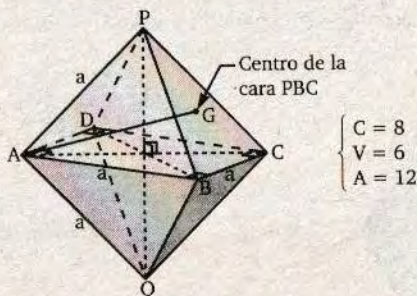
$$S_{\text{Total}} = 6a^2$$

$$\text{Volumen} = a^3$$

$$d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Octaedro regular

Esta limitado por ocho regiones triangulares equiláteras unidas de cuatro en cuatro.



$$PQ = a\sqrt{2}$$

$$S_{\text{Total}} = 2a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Volumen} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

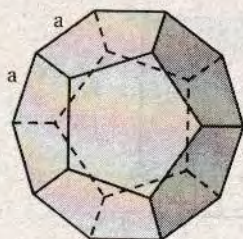
$$AG = a$$

$$\text{Distancia entre dos caras opuestas} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Medida del diedro formado por dos caras adyacentes} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 09**Dodecaedro regular**

Esta limitado por doce regiones limitadas por pentágonos regulares unidas de tres en tres.



$$\begin{cases} C = 12 \\ V = 20 \\ A = 30 \end{cases}$$

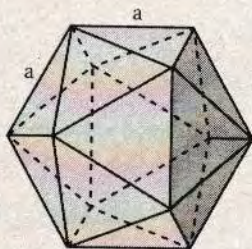
$$S_{\text{Total}} = 15a^2 \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$\text{Volumen} = \frac{5a^3}{2} \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$$

$$N^{\circ} \text{ Diagonales} = 100$$

Icosaedro regular

Esta limitado por veinte regiones triangulares equiláteras unidas de cinco en cinco.



$$S_{\text{Total}} = 5a^2 \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} C = 20 \\ V = 12 \\ A = 30 \end{cases}$$

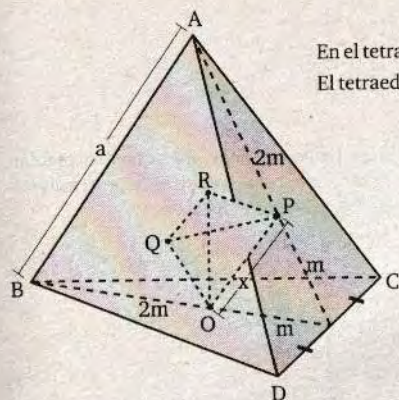
$$\text{Volumen} = \frac{5a^3}{6} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

$$N^{\circ} \text{ Diagonales} = 36$$

POLIEDROS CONJUGADOS

Se llaman poliedros conjugados a aquellos poliedros regulares en que el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro y viceversa. (Uniendo los centros de las caras de uno, se obtiene el otro). Se cumple además que ambos poliedros tienen el mismo número de aristas.

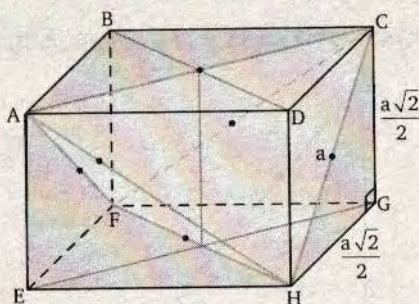
Son poliedros conjugados: el octaedro y el hexaedro, el icosaedro y el dodecaedro; el tetraedro es conjugado consigo mismo.



En el tetraedro regular ABCD: O; P; Q y R son centros de sus caras.
El tetraedro OPQR es el poliedro conjugado inscrito.

$$x = \frac{a}{3}$$

TETRAEDRO INSCRITO EN EL HEXAEDRO REGULAR



En la figura se muestra un cubo, tal que trazando las diagonales de sus caras se determina un tetraedro regular ACFM.

TEOREMAS

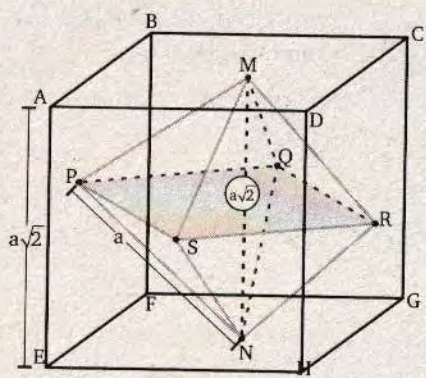
1. Dos aristas opuestas de un tetraedro regular son perpendiculares. En la figura $\overline{AC}$ es perpendicular con $\overline{FH}$
2. La distancia entre dos aristas opuestas del tetraedro regular es la arista del cubo.

En la figura la distancia entre $\overline{AC}$ y $\overline{FH}$ es: $CG = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

3. La relación de volúmenes del cubo y del tetraedro inscrito es tres:

$$\frac{V_{(\text{CUBO})}}{V_{(\text{TETRAEDRO})}} = \frac{3}{1}$$

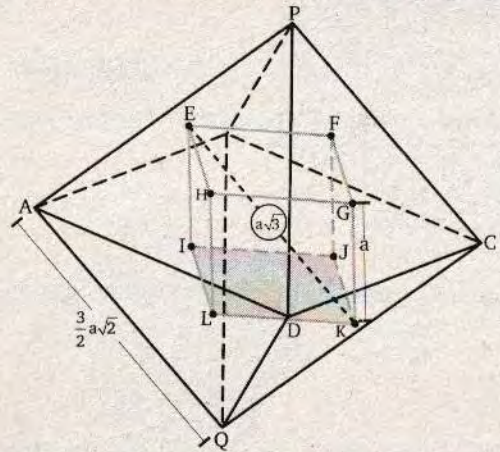
OCTAEDRO REGULAR INSCRITO EN EL CUBO



En la figura se tiene un octaedro regular inscrito en el cubo, que se obtiene al unir los centros de las caras del cubo.

$$\frac{V_{(CUBO)}}{V_{(OCTAEDRO)}} = \frac{6}{1}$$

HEXAEDRO REGULAR INSCRITO EN EL OCTAEDRO REGULAR



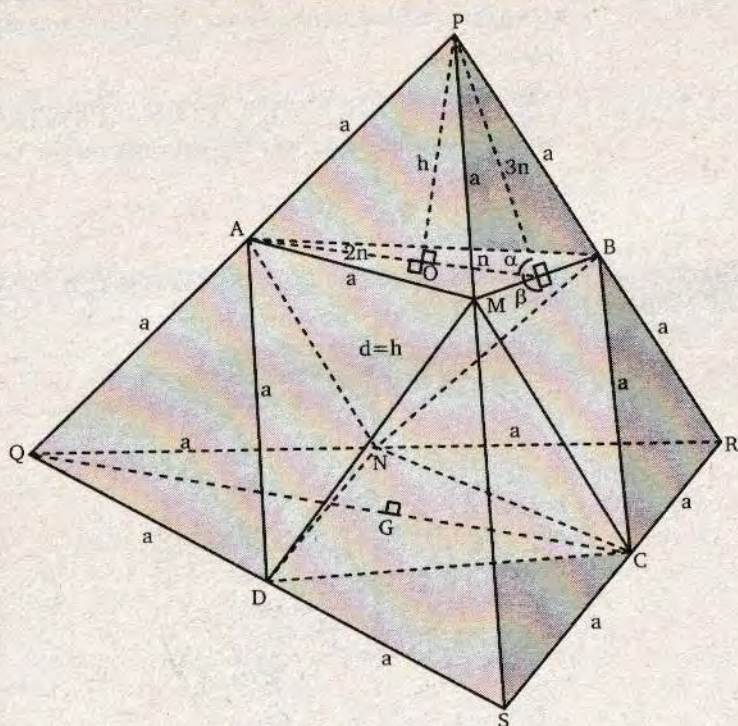
En la figura se tiene un octaedro regular tal que al unir los centros de sus caras se obtiene un hexaedro regular.

- * Si la arista del cubo mide "a", entonces la diagonal del octaedro mide "3a"
- * La diagonal del hexaedro mide igual que la distancia entre dos caras opuestas del octaedro regular.

$$\frac{V_{(OCTAEDRO)}}{V_{(CUBO)}} = \frac{9}{2}$$

TEOREMAS DEL TETRAEDRO Y EL OCTAEDRO REGULAR

- DEMOSTRACIÓN:**
- a) Altura del tetraedro regular: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
 - b) Distancia entre dos caras opuestas del octaedro regular: $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
 - c) Distancia de un vértice al centro de una cara opuesta del octaedro regular: a
 - d) Los diedros del tetraedro regular y el octaedro regular son suplementarios: $\alpha + \beta = 180^\circ$.



- Dado el tetraedro regular P – QRS, cuya arista mide “2a”, sean A; B; C; D; M y N puntos medios de sus aristas.
- Podemos observar que se determinan cuatro tetraedros regulares y un octaedro regular, cuyas aristas miden “a”

- En el Δ equilátero ABM: $AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$

En el Δ AOP: Por Pitágoras: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

h: medida de la altura del tetraedro regular.

- En el Δ PGQ, $\overline{AO}$ es la base media $\rightarrow PO = OG = h$, OG es la distancia entre dos caras opuestas del octaedro regular M – ABCD – N

$$\rightarrow OG = h = d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

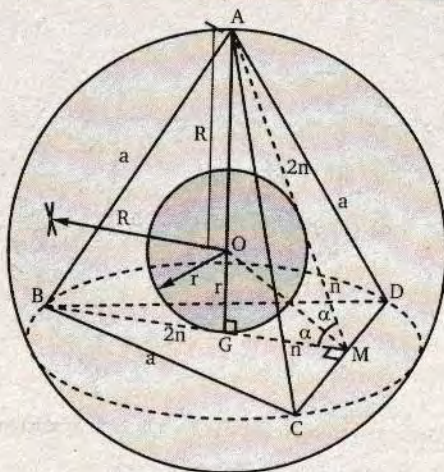
- En el Δ PGQ, $\overline{AG}$ es la mediana relativa a la hipotenusa:

$$\rightarrow AG = AQ = AP = a.$$

- AG es la distancia de un vértice al centro de la cara opuesta CDN en el octaedro regular.
- En $\overline{MB}$, α y β son las medidas de los diedros en las aristas del tetraedro regular y el octaedro regular, los cuales son suplementarios.

Donde : $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ y $\beta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

DEMOSTRACIÓN DEL CALCULO DE RADIOS DE LAS ESFERAS INSCRITA Y CIRCUNSCRITA A UN TETRAEDRO REGULAR



Datos:

- La arista del tetraedro regular mide "a".
- h; R y r son la altura y los radios de las esferas, circunscrita e inscrita al tetraedro.

Por demostrar: $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$; $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ y $\frac{r}{1} = \frac{R}{3} = \frac{h}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$

- Si $\overline{AG}$ es la altura del tetraedro regular, entonces G es baricentro de la base $BG = 2GM = 2n$ y $BM = AM = 3n$.
- En el $\triangle GMA$, MD es bisectriz, entonces se cumple: $\frac{R}{r} = \frac{3n}{n} \rightarrow R = 3r \dots\dots(I)$
- $AG = \frac{a\sqrt{6}}{3} = R + r = 4r \rightarrow r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ y $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$
- Además: $AG = h = 4r \dots\dots(II)$

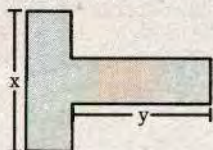
Finalmente de (I) y (II):

$$\therefore \frac{r}{1} = \frac{R}{3} = \frac{h}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

- Halle el número de diagonales del poliedro formado por 4 caras triangulares y 3 caras cuadrangulares.
A) 2 B) 3 C) 4
D) 3 E) 1
- Calcule el número de caras de un poliedro sabiendo que la suma de los ángulos internos de todas sus caras es 10800° y la suma entre el número de caras, de vértices y de aristas es 90.
A) 14 B) 16 C) 18
D) 20 E) 24
- Un poliedro convexo está limitado por 3k regiones triangulares; 3k regiones cuadrangulares y 5k regiones pentagonales; tal que la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras es 4320. Calcular el número de caras.
A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14
- Se tiene un poliedro formado por 2 caras pentagonales y 6 cuadrangulares. Calcule el número de aristas de dicho poliedro.
A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19
- En un octaedro regular la suma de longitudes de todas sus aristas es 48m. Calcule el área de su superficie total.
A) $32\sqrt{3} \text{ m}^2$ B) $16\sqrt{3} \text{ m}^2$
C) $4\sqrt{3} \text{ m}^2$
D) 4 m^2 E) $64\sqrt{3} \text{ m}^2$
- La altura de un tetraedro regular mide 2. Calcular la medida de su arista.
A) $2\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{6}$
- En un hexaedro regular ABCD-EFGH, calcular el área de la región triangular ABM siendo M el centro de la cara CDGH y $AE = 8$
A) 6 B) 8 C) $8\sqrt{5}$
D) $16\sqrt{5}$ E) $16\sqrt{2}$
- Se tiene un hexaedro regular ABCD-EFGH. Calcular su volumen, si la distancia del punto medio de EG a la diagonal del hexaedro mide $\sqrt{6}$
A) 216 B) 226 C) 236
D) 246 E) 256
- Calcule la distancia entre los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro regular de arista "a".
A) a B) 2a C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{2}a$ E) 3a
- ¿En qué relación se encuentran las áreas totales de un octaedro y un icosaedro regulares; sabiendo que la arista del primero mide el triple de la del segundo?
A) $\frac{15}{7}$ B) $\frac{20}{3}$ C) $\frac{18}{5}$
D) $\frac{10}{7}$ E) $\frac{12}{7}$

11. En el gráfico se muestra el desarrollo de la superficie de un cubo, hallar $\frac{x}{y}$



- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{3}{2}$ E) 1
12. En un hexaedro regular ABCD-EFGH, M es punto medio de $\overline{CD}$ y en la prolongación de $\overline{BF}$ se ubica el punto P, tal que: $BF = BP$ y $PM = \sqrt{21}$. Calcule el volumen del hexaedro.
- A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8
13. En un hexaedro regular ABCD-EFGH cuya arista mide 4, en $\overline{HG}$ se ubica el punto P tal que $HP = 1$; en $\overline{PF}$ se ubica el punto M, tal que $MP = 2$. Calcule BM
- A) 4 B) 5 C) $4\sqrt{2}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$
14. En el cubo ABCD-EFGH de arista "a", calcule el área de la región AFGD.
- A) a^2 B) $a^2\sqrt{3}$ C) $2a^2$
D) $a^2\sqrt{2}$ E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
15. En un hexaedro regular ABCD-EFGH de arista 4, calcule el área de la región EGD.
- A) $4\sqrt{3}$ B) $32\sqrt{3}$ C) $8\sqrt{3}$
D) $12\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{3}$

16. ¿Cuánto mide la arista de un cubo, si se sabe que la distancia de un vértice a una diagonal del cubo es $\sqrt{6}$?
- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 4
D) 3 E) $3\sqrt{2}$
17. Calcular el área de la superficie total de un tetraedro regular, si el área de una cara es 20m^2
- A) 40m^2 B) 60m^2 C) 80m^2
D) 120m^2 E) 160m^2
18. Calcular el área de la superficie total de un hexaedro regular cuya diagonal mide 6 cm.
- A) 144cm^2 B) 126cm^2 C) 864cm^2
D) 316cm^2 E) 468cm^2
19. Determine el volumen de un tetraedro regular, sabiendo que la suma de las longitudes de todas sus aristas es 36 cm.
- A) $9\sqrt{2}\text{cm}^3$ B) $36\sqrt{2}\text{m}^2$
C) 18cm^2
D) 12cm^2 E) $18\sqrt{2}\text{cm}^2$
20. Calcular la altura de un tetraedro regular; sabiendo que su área total es $62,28\text{cm}^2$ (Considere: $\sqrt{3} = 1,73$)
- A) $\sqrt{6}\text{cm}$ B) $2\sqrt{3}\text{cm}$ C) $2\sqrt{6}\text{cm}$
D) $3\sqrt{3}\text{cm}$ E) $\sqrt{3}\text{cm}$

21. El número de caras más el número de vértices más el número de aristas y más el número de ángulos rectos a que equivale la suma de las medidas de las caras de todos los ángulos sólidos de un poliedro convexo excede en 14 al doble de la suma del número de aristas y vértices. Calcule el número de vértices.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

22. En un poliedro, la razón entre el número de aristas y el número de caras es $\frac{5}{3}$. Calcule el número de caras, si el número de vértices es mayor que 6 y menor que 10.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

23. Un poliedro está limitado por n regiones triangulares y $3n$ regiones pentagonales. Calcule el número de aristas, si el número de vértices es 32.

A) 40 B) 54 C) 64
D) 18 E) 68

24. En un poliedro se cumple que el número de caras es igual al número de vértices. Si la razón entre el número de aristas y el número de caras es $\frac{12}{7}$, halle la suma de los números de caras, aristas y vértices.

A) 24 B) 26 C) 28
D) 30 E) 32

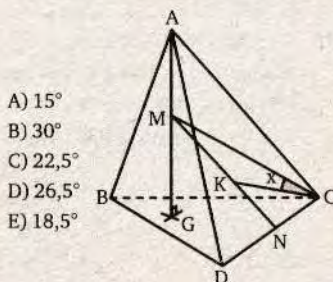
25. Un poliedro está determinado por 20 regiones pentagonales y 12 regiones hexagonales. Calcular su número de diagonales.

A) 1260 B) 1246 C) 625
D) 1540 E) 1860

26. En un poliedro convexo $O-ABC$:
 $OA = \sqrt{17}$, $OB = OC = 6$, $AB = AC = 5$ y $BC = 8$. Halle la distancia trazada del punto medio de la altura $\overline{OH}$ a la cara OBC .

A) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

27. En el tetraedro regular $ABCD$, M ; N y K son puntos medios de AG , CD y MN . Calcular la $m\angle MCK$.



A) 15°
B) 30°
C) $22,5^\circ$
D) $26,5^\circ$
E) $18,5^\circ$

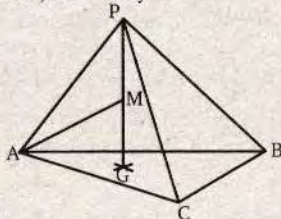
28. En un tetraedro regular $ABCD$ la distancia del centro de la cara BCD hacia $\overline{AD}$ es $2\sqrt{2}$, calcular el volumen de dicho sólido.

A) $12\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $20\sqrt{2}$
D) $18\sqrt{2}$ E) $15\sqrt{2}$

29. Un tetraedro regular y un hexaedro regular tienen aristas congruentes. Calcular la relación de sus volúmenes.

A) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{6}$
 D) $\frac{\sqrt{2}}{9}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

30. En la figura se muestra un tetraedro regular P - ABC. Calcule AM, si $\overline{PG}$ es altura; $PM = MG$ y $PB = 2$.



A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$
 D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

31. La longitud del segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro regular es $\sqrt{2}$ cm. ¿Cuál es la longitud de la arista?

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
 D) $\sqrt{2}$ cm E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

32. En un tetraedro O - ABC, M y N son puntos medios de $\overline{OB}$ y $\overline{AC}$. $m\angle OAB = m\angle OCB = 90^\circ$, $OB = 100$ u, $AC = 80$ u. Halle la longitud de $\overline{MN}$.

A) 12 u B) 16 u C) 18 u
 D) 25 u E) 30 u

33. Se tiene un tetraedro regular de arista "a". Calcular el radio de la esfera tangente a las caras laterales en puntos pertenecientes a las aristas básicas.

A) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$
 D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

34. En un tetraedro, dos aristas opuestas miden 6 y 8. Calcular la suma de las medidas de todas las aristas del tetraedro, sabiendo que sus aristas son tangentes a una esfera.

A) 42 B) 28 C) 32
 D) 56 E) 48

35. Desde un vértice de un cubo se trazan: una diagonal del cubo y una diagonal de una cara. Calcule la medida del ángulo formado por dichas diagonales en grados sexagesimales.

A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
 C) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
 D) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ E) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$

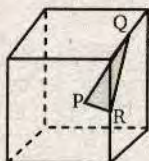
36. En un hexaedro regular ABCD - EFGH se ubica M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{HD}$, tal que: $CM = 3(AM) = 6$ y $DN = NH$. Calcule MN

A) $\frac{\sqrt{56}}{2}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $3\sqrt{2}$
 D) $\frac{4\sqrt{28}}{3}$ E) $\frac{5\sqrt{61}}{2}$

37. En un cubo ABCD - EFGH se traza un plano perpendicular a la diagonal $\overline{FD}$, en su punto medio. Calcular el ángulo formado con el plano de la base EFGH.

A) $\arctan \sqrt{2}$ B) 30
C) $\arctan \sqrt{6}$
D) $\arctan \sqrt{5}$ E) 60

38. Se tiene un cubo de arista "a", hallar el área del triángulo PQR, si P es centro, Q y R son puntos medios.



A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

39. En un hexaedro regular ABCD - EFGH, M y N son puntos medios de $\overline{EH}$ y $\overline{GH}$ respectivamente. Si la distancia de C a $\overline{MN}$ es 3m, halle el área de la superficie total del hexaedro.

A) 35 m^2 B) 46 m^2 C) 60 m^2
D) 48 m^2 E) 52 m^2

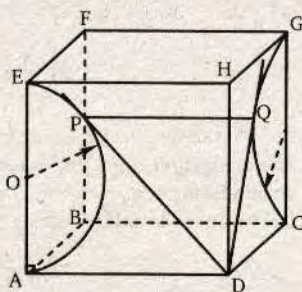
40. Si la altura de un tetraedro regular es congruente con la diagonal de un octaedro regular, calcular la relación entre sus volúmenes.

A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) 1

41. En un hexaedro regular ABCD - EFGH los puntos M y N son los puntos medios de las aristas $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$, respectivamente, además el punto Q es el centro de la cara BFGC. ¿Qué región poligonal queda determinada por la intersección del plano que pasa por los puntos M, N y Q y el cubo?

A) Hexagonal
B) Cuadrangular
C) Hexagonal regular.
D) Triangular
E) Pentagonal

42. En la figura, P y Q son puntos de tangencia, si $PQ = 12\sqrt{2}u$, calcular la longitud de una de las diagonales del cubo.



A) $10\sqrt{3}u$ B) $10\sqrt{2}u$ C) $20\sqrt{3}u$
D) $18u$ E) $18\sqrt{6}u$

43. En la cara DHGC de un hexaedro regular ABCD - EFGH se traza el triángulo equilátero DMC. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{AF}$ y $\overline{MC}$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

44. En un hexaedro regular ABCD - EFGH, calcular la medida del ángulo entre $\overline{EF}$ y $\overline{GD}$.

A) 37° B) 53° C) 45°
D) 60° E) 90°

45. En un octaedro regular, la distancia del centro a una cara es d unidades. Entonces, la longitud de la arista es:

A) $d\sqrt{2}$ B) $d\sqrt{3}$ C) $d\sqrt{4}$
D) $d\sqrt{5}$ E) $d\sqrt{6}$

46. En un octaedro regular $P - ABCD - Q$, la suma de las áreas de las caras del poliedro PABD es $2(\sqrt{3} + 2)m^2$. Calcular el volumen del octaedro regular.

A) $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ B) $\frac{64}{3}\sqrt{6}$ C) $64\sqrt{2}$
D) $\frac{8}{3}\sqrt{2}$ E) $\frac{64}{3}\sqrt{2}$

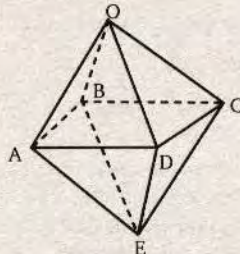
47. Dado un tetraedro regular de arista "a", calcular el área de la sección determinada por un plano de simetría que pasa por una de las aristas.

A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{a^2\sqrt{2}}{5}$ E) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$

48. En un tetraedro regular $P - ABC$, O es centro de la cara ABC y M es punto medio de $\overline{BP}$. Si $OM = 2m$, halle el área de la superficie total del tetraedro regular.

A) $10\sqrt{3}m^2$ B) $16\sqrt{3}m^2$ C) $12\sqrt{3}m^2$
D) $18\sqrt{3}m^2$ E) $5\sqrt{3}m^2$

49. En el octaedro regular mostrado, calcular la distancia de "G" a la región ABCD, si $AG = 3\sqrt{2}$. G: Baricentro de la cara OCD.



A) 1 B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{6}$

50. En un octaedro regular $P - ABCD - Q$, cuya arista mide 6 m, M y N son centros de las caras PCD y QCD respectivamente. Calcular MN.

A) $2\sqrt{2}$ B) 2 C) 4
D) 3 E) $3\sqrt{2}$

51. En un octaedro regular $P - ABCD - Q$, cuyo centro es O. $AB = \sqrt{6}$. ¿Cuánto dista O de la cara PCD?

A) 2 B) 3 C) 2,5
D) $\sqrt{2}$ E) 1

52. Se tiene un tetraedro regular de arista "a". Hallar el volumen del tetraedro regular que se forma al unir los baricentros de las caras.

A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$ B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{81}$ C) $\frac{a^3\sqrt{2}}{162}$
D) $\frac{a^3\sqrt{2}}{216}$ E) $\frac{a^3\sqrt{2}}{324}$

53. Se tiene el tetraedro regular ABCD, siendo M, R, I, L los puntos medios de las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{BC}$. Calcula el área de la superficie total de dicho tetraedro si el área de la región cuadrangular MRIL es 3m^2 .
- A) $24\sqrt{3}\text{m}^2$ B) 24m^2 C) $12\sqrt{3}\text{m}^2$
D) 12m^2 E) $9\sqrt{3}\text{m}^2$
54. En un hexaedro regular, la distancia entre los centros de dos caras adyacentes es $\sqrt{2}$. Entonces el volumen del hexaedro es:
- A) 4 B) $2\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 6 E) 8
55. Calcular la medida de la arista de un tetraedro regular, sabiendo que la distancia del baricentro de una cara lateral a la altura del tetraedro es igual a 5.
- A) $15\sqrt{3}$ B) 15 C) $12\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$ E) $15\sqrt{2}$
56. En un cubo, las caras opuestas son ABCD y EFGH, siendo las aristas que las conectan $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$. El ángulo que forma $\overline{BE}$ con $\overline{AH}$ mide:
- A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°
57. El área total de un tetraedro regular es igual al área total de un octaedro regular de arista igual a 5 cm. Calcular la longitud de la arista del tetraedro regular.
- A) 5 B) 6 C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$
58. En un tetraedro regular B – ACD, O es centro de la cara ACD. Si la distancia entre los puntos medios de $\overline{OB}$ y $\overline{CD}$ es $2\sqrt{3}\text{m}$, halle la longitud de la altura del tetraedro regular.
- A) $2\sqrt{3}\text{m}$ B) $4\sqrt{2}\text{m}$ C) $3\sqrt{3}\text{m}$
D) $4\sqrt{3}\text{m}$ E) $6\sqrt{2}\text{m}$
59. Si en un dodecaedro regular, dos caras adyacentes son los pentágonos regulares ABCDE y EFGHD. Entonces, la medida del ángulo formado por las rectas AB y FH es:
- A) 15° B) 30° C) 36°
D) 45° E) 72°
60. En un poliedro convexo el número de caras es igual al número de vértices. Si la suma de las medidas de los ángulos de todas sus caras es 1440° , entonces el número de aristas es:
- A) 8 B) 10 C) 11
D) 12 E) 15

61. Un poliedro convexo está formado por un pentágono convexo, dos cuadriláteros convexos y tres triángulos. Si se elimina una cara, entonces su número total de aristas es:
- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14
62. Las caras de un poliedro convexo son regiones pentagonales. Si las caras fueran regiones triangulares, se necesitarían 20 caras más para que el número de aristas no varíe, entonces el número de caras del poliedro es:
- A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 40
63. En un poliedro convexo se cumple que: $C + V + A = 30$ (C: número de caras; V: número de vértices y A: número de aristas). Si las medidas de los ángulos de todas las caras suman 1800° , entonces el número de caras es:
- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12
64. En un poliedro convexo, la suma de las medidas de los ángulos de todas las caras es 1800 y el número de caras, más el número de vértices y más el número de aristas es 30. Entonces, el número de caras es:
- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12
65. Un poliedro convexo, tiene 33 vértices y está conformado por 8 caras triangulares, 9 caras cuadrangulares y m caras pentagonales. Entonces m es:
- A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 14
66. En un tetraedro regular, la suma de las longitudes de sus aristas es 48 cm, entonces el área de la superficie total del poliedro es:
- A) $\frac{64}{3}\sqrt{3}\text{ cm}^2$ B) $32\sqrt{3}\text{ cm}^2$
C) $64\sqrt{3}\text{ cm}^2$
D) 64 cm^2 E) 32 cm^2
67. En un tetraedro regular, la mínima distancia entre dos aristas no coplanares es d unidades, entonces la longitud de la arista del tetraedro será:
- A) $2d\sqrt{3}$ B) $2d\sqrt{2}$ C) $d\sqrt{3}$
D) $d\sqrt{6}$ E) $d\sqrt{2}$
68. En un tetraedro regular la arista mide a unidades, se traza un plano de simetría que pasa por una de sus aristas. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita en la sección determinada por el plano de simetría.
- A) $\frac{a}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ B) $\frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$
C) $\frac{a}{3}(\sqrt{6} - 1)$
D) $\frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1)$ E) $\frac{a}{4}$

69. En un tetraedro $V - ABC$, el ángulo triedro V es trirectángulo. Si la suma de los cuadrados de las áreas de las caras VAB , VBC y VAC es igual a S unidades cuadradas, entonces el área de la cara ABC es:

A) $\frac{\sqrt{S}}{2}$ B) $\frac{S}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{\sqrt{S}}{3}$
D) $S\sqrt{3}$ E) $\sqrt{S}$

70. En un tetraedro regular $P - ABC$, M es punto medio de la altura $\overline{PD}$. Si $AM = 3$ y H es la proyección de M sobre un plano perpendicular al segmento $\overline{BP}$ y que contiene al segmento $\overline{AC}$. La distancia del punto H al segmento $\overline{BP}$ es:

A) 0,5 B) 0,75 C) 1,0
D) 1,25 E) 1,5

71. D es el punto medio de la arista $\overline{SA}$, E el punto medio de la altura $\overline{SO}$ del tetraedro regular $S - ABC$. Entonces, la medida del ángulo entre las rectas $\overline{OD}$ y $\overline{CE}$ es:

A) 20 B) 25 C) 30
D) 45 E) 60

72. En un tetraedro regular $ABCD$, $A - M - B$; $B - N - C$; $AM = MB$; $BQ = 5(QD)$ y $BN = 2(NC)$. Las rectas MN , MQ y QN intersecan al plano ACD en los puntos E , F y G respectivamente. Calcule:

$$\frac{CE - DG}{DF}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{3}$

73. $ABCD - EFGH$ es un hexaedro regular, O es el centro de la cara $EFGH$. Si M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{FG}$, entonces la medida del ángulo diedro entre los planos MBN y FNO es:

A) $\tan^{-1}(2)$ B) $\tan^{-1}(\sqrt{2})$

C) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

D) $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ E) $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

74. Se tiene el hexaedro regular $ABCD - EFGH$, calcular la medida del ángulo diedro determinado por los planos EBH y BGH .

A) 120° B) 135° C) 127°
D) 75° E) 90°

75. En las caras $ABFE$ y $DCGH$ de un hexaedro regular se trazan los triángulos equiláteros APB y HQC . Calcular la distancia de los baricentros de dichos triángulos, si $AB = 6$ u.

A) $2\sqrt{21 - 6\sqrt{3}}$ u B) $\sqrt{27 - 2\sqrt{3}}$ u

C) $\sqrt{8 - \sqrt{2}}$ u

D) $2\sqrt{9 - \sqrt{3}}$ u E) $3\sqrt{12 - \sqrt{3}}$ u

76. Si $ABCD - EFGH$ es un hexaedro regular, entonces la medida del ángulo diedro entre los planos $BDHF$ y $ACGE$ es:

A) 96 B) 70 C) 90
D) 45 E) 15

77. En el cubo ABCD - EFGH, G_1 es el centro de la cara ABFE; calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AE}$ y $\overline{GG_1}$.

A) $\arctan 2$ B) $\arctan 3$
C) $\arctan \sqrt{5}$
D) $\arctan \sqrt{6}$ E) 60°

78. ABCD - EFGH es un hexaedro regular, P es punto medio de la arista $\overline{AE}$ y Q punto medio de la diagonal $\overline{BH}$. Entonces, la medida del ángulo determinado por $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ es:

A) $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ B) $\tan^{-1}(2)$
C) $\tan^{-1}(\sqrt{2})$
D) 45° E) 30°

79. En un cubo ABCD - EFGH, se ubica M punto medio de $\overline{AE}$. Si la arista del cubo mide L unidades, entonces la distancia entre $\overline{MC}$ y $\overline{FH}$ es:

A) $\frac{L\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{L\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{L\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{L\sqrt{2}}{5}$ E) $\frac{L\sqrt{2}}{6}$

80. Un polígono está formado por 6 regiones octagonales regulares y ocho regiones triangulares regulares, tal que el lado del octágono mide u. Calcule el volumen de dicho poliedro en u^2 .

A) $14\sqrt{2} + \frac{28}{3}$ B) $15\sqrt{2} + \frac{14}{3}$
C) $15\sqrt{2} + \frac{28}{3}$
D) $14\sqrt{2} + \frac{56}{3}$ E) $7\sqrt{2} + 22$

81. En un hexaedro regular KLMN - PQRS, la arista mide a unidades, la mínima distancia entre la diagonal $\overline{KR}$ y el segmento que une los centros de las caras PQRS y NMRS es:

A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{5}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$
D) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

82. En un hexaedro regular ABCD - EFGH cuya arista mide ℓ unidades, M es punto medio de $\overline{AE}$. Entonces, la distancia entre $\overline{HF}$ y $\overline{CM}$ es:

A) $\frac{\ell\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$
D) $\ell\sqrt{2}$ E) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

83. Si en un hexaedro regular ABCD - EFGH, la arista mide a unidades, entonces la distancia entre las diagonales $\overline{AG}$ y $\overline{HF}$ es:

A) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{6}$
D) $\frac{a\sqrt{8}}{6}$ E) $\frac{2a\sqrt{3}}{5}$

84. En un hexaedro regular MNPQ - RSTU de arista ℓ , una araña se ubica en el vértice R. Entonces la longitud del camino más corto para llegar al punto medio de la arista $\overline{PT}$, si debe recorrer las caras MQUR y QPTU es:

A) $\frac{\sqrt{17}\ell}{3}$ B) $\frac{\sqrt{17}\ell}{2}$ C) $\frac{\sqrt{17}\ell}{4}$
D) $\frac{\sqrt{17}\ell}{5}$ E) $\frac{3\sqrt{17}\ell}{4}$

85. En un cubo MNPQ - RSTU, la arista mide a unidades, entonces la mínima distancia entre las diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{QT}$ es:

A) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

86. En un hexaedro regular ABCD-EFGH, cuya arista mide a unidades, se ubica el punto medio M del segmento $\overline{AE}$. Determine la distancia entre $\overline{MC}$ y $\overline{FH}$.

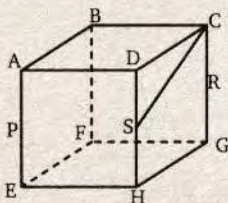
A) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ B) $\frac{a}{2}$ C) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$
D) $\frac{a}{4}$ E) $\frac{a}{4}\sqrt{2}$

87. En un tetraedro regular S-ABC, $\overline{AD}$ es la mediana del triángulo ABC. Se ubica E punto medio de la arista $\overline{SB}$. Entonces, la medida del ángulo entre las $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ es

A) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$ B) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$
C) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$
D) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)$ E) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$

88. La figura representa al hexaedro regular ABCD-EFGH, si P, Q, R y S son puntos medios de las aristas laterales, entonces el simétrico de $\overline{CS}$ con respecto a $\overline{PR}$ es:

A) $\overline{CQ}$
B) $\overline{RA}$
C) $\overline{GA}$
D) $\overline{GQ}$
E) $\overline{EQ}$



89. Un poliedro convexo. está formado por n regiones cuadradas y $4n$ regiones triangulares. Si el número de vértices es 8, entonces n es:

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

90. En un tetraedro regular, la arista mide ℓ unidades. Entonces la distancia entre los baricentros de dos caras es:

A) $\frac{\ell}{4}$ B) $\frac{\ell}{3}$ C) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\ell\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\ell}{2}$

91. En un hexaedro regular ABCD-EFGH, se ubica N punto medio de $\overline{CG}$. Si $AB = \sqrt{3}$, entonces la distancia entre $\overline{NB}$ y $\overline{FH}$ es:

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

92. Dado un hexaedro regular, se construye un tetraedro regular trazando una diagonal de cada cara del hexaedro regular. Entonces, la razón entre las áreas totales de dichos poliedros es:

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

93. En un octaedro regular, $E - ABCD - F$, su arista mide L y A' es el simétrico del punto A , respecto del plano ECD . Calcule AA'

A) $\frac{L\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{2L\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{L\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{2L\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2L\sqrt{5}}{3}$

94. En un octaedro regular, la distancia entre los centros de dos caras que tienen un vértice común de aristas no comunes es ℓ unidades. Entonces, el área (en u^2) de la superficie total del octaedro es:

A) $\frac{9}{2}\sqrt{3}\ell^2$ B) $4\sqrt{3}\ell^2$ C) $6\sqrt{3}\ell^2$
D) $8\sqrt{3}\ell^2$ E) $9\sqrt{3}\ell^2$

95. Las caras de un poliedro convexo son: 8 regiones triangulares, 9 regiones cuadrangulares y m regiones pentagonales. Si el poliedro tiene 33 vértices, entonces m es:

A) 9 B) 10 C) 11
D) 14 E) 12

96. En un octaedro regular, la arista mide ℓ unidades. Entonces, la distancia de un vértice al centro de una cara opuesta es:

A) ℓ B) $\frac{2\ell}{3}$ C) $\frac{\ell\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

97. En un octaedro regular $E - ABCD - F$

se une el vértice A con el baricentro G de la cara ECD . Si $AG = 3\sqrt{2}$ unidades, entonces la distancia de G al plano que contiene a los vértices A, B, C y D es:

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) 1

98. En un octaedro regular $M - ABCD - N$ la arista mide a unidades, el punto P es punto medio de $\overline{AD}$. Entonces, la mínima distancia entre $\overline{BC}$ y $\overline{MP}$ es:

A) $\frac{a\sqrt{6}}{5}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ C) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ E) $a\sqrt{6}$

99. En un icosaedro regular PQ es una de las diagonales de mayor longitud del icosaedro y un plano determinado por cinco vértices del icosaedro es perpendicular a PQ en T . Entonces: $\frac{PT}{TQ}$ es:

A) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ B) $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$
D) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$

100. Calcule la longitud del circunradio de un icosaedro regular cuya arista mide " a u".

A) $\frac{a\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{2+\sqrt{5}}}{4}$
C) $a\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{3}}$
D) $\frac{a\sqrt{3+\sqrt{5}}}{8}$ E) $a\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:** Piden, número de diagonales (ND).

$$\text{Datos: } \begin{cases} \Delta: 4 \\ \square: 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 12$$

 $\Rightarrow$ Por el teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$7 + V = 12 + 2$$

$$\Rightarrow V = 7$$

Ademas: n° de diagonales de las caras

$$\begin{cases} \Delta: 0 \\ \square: 3 \times 2 = 6 \end{cases}$$

Luego:

$$ND = C_2^7 - 12 - 6$$

$$ND = \frac{7 \times 6}{2} - 18$$

$$\therefore ND = 3$$

Rpta.: B**Resolución 2:** Piden: n° de caras: C

$$S = 10800^\circ \wedge C + V + A = 90$$

$$\Rightarrow 360^\circ(A - C) = 10800^\circ \wedge A + 2 + A = 90$$

$$A - C = 30 \wedge A = 44$$

$$\Rightarrow 44 - C = 30$$

$$\therefore C = 14$$

Rpta.: A

Resolución 3:

Piden el n° de caras : C

Datos:

$$\Delta: 3k$$

$$\square: 3k$$

$$\triangle: 5k$$

$$S = 4320$$

$$\Rightarrow A = \frac{3 \times 3 + 4 \times 3 + 5 \times 5}{2} \Rightarrow A = 23$$

Luego:

$$S = 360(A - C)$$

$$4320 = 360(23 - C)$$

$$\therefore C = 11$$

Rpta.: B**Resolución 4:**

Piden n° de aristas: A

Datos:

$$2 \text{ caras } \triangle$$

$$6 \text{ caras } \square$$

$$\Rightarrow A = \frac{2 \times 3 + 6 \times 4}{2}$$

$$\therefore A = 17$$

Rpta.: C**Resolución 5:**

Piden :

$$S_{\text{(octaedro)}} = ?$$

dato :

$$\sum (\text{aristas}) = 48$$

Sea arista: "a"

$$\Rightarrow \left(\frac{\# \text{ aristas}}{\text{octaedro}} \right) = 12$$

$$\rightarrow 12a = 48$$

$$a = 4$$

Luego: $S_T = 8 - \frac{4^2\sqrt{3}}{4}$

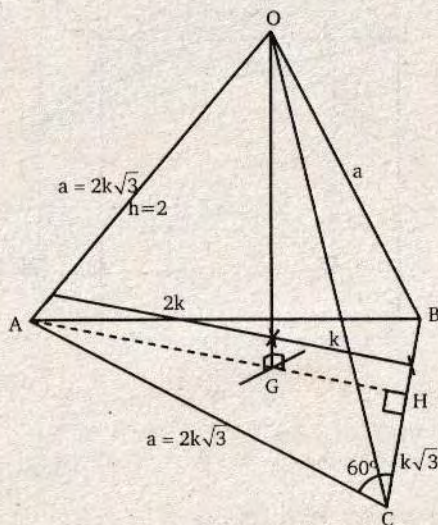
$$\therefore S_T = 32\sqrt{3}$$

Rpta.: A

Resolución 6:

Piden : $a = 2k\sqrt{3} = ?$

Dato : $h = 2$



Se sabe G : baricentro del $\triangle ABC$

$$\rightarrow AG = 2(GH)$$

Luego : $CH = k\sqrt{3} \wedge AC = 2k\sqrt{3}$ (Triángulo notable de 30° y 60°).

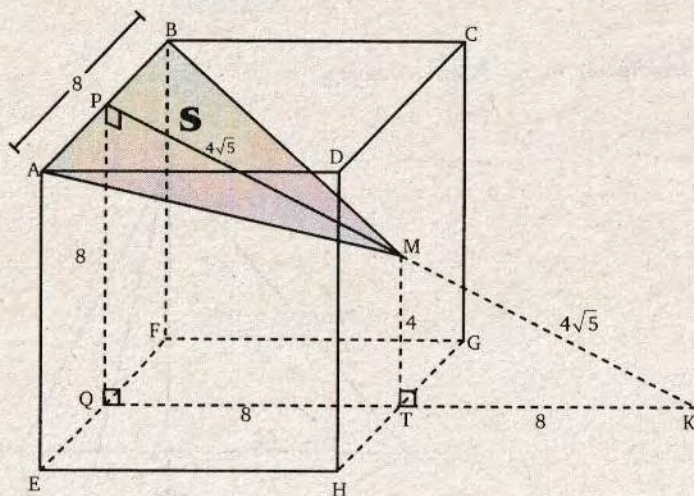
En $\triangle OGA$ (Teorema de Pitágoras):

$$(2k\sqrt{3})^2 = (2k)^2 + 2^2$$

$$\rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{6}$$

Resolución 7:



$S = ?$ datos : $AE = 8$

M:centro

Trazamos: $\overline{PQ} \parallel \overline{MT}$

$$\rightarrow PQ = 8 \wedge MT = 4$$

Luego: $\overline{TM}$: base media del $\triangle KPO$

$$\rightarrow QT = 8 \quad \wedge \quad TK = 8$$

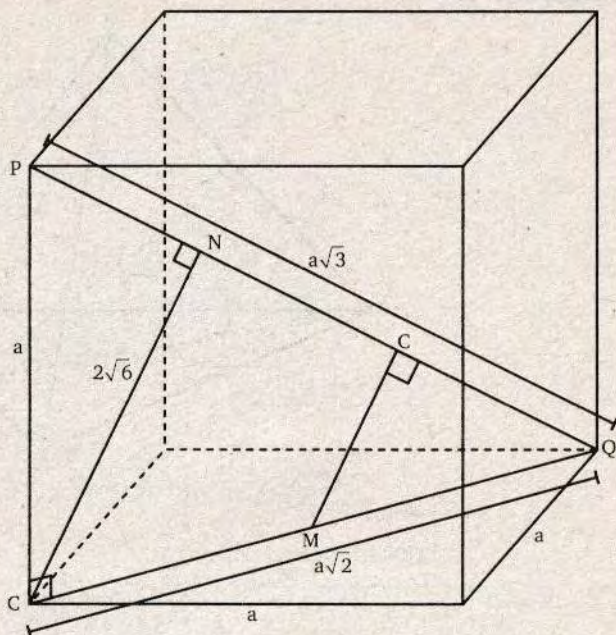
$$MK = 4\sqrt{5} \wedge PM = 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S = \frac{8.4\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore S = 16\sqrt{5}$$

Rpta.: D

Resolución 8:



Piden : $V_{\text{cubo}} = ?$

dato : $d(M - \overline{PQ})$

Se observa: $\overline{MT} // \overline{CN} \rightarrow \overline{TM}$ es base media de $\triangle QCN$.

$$\rightarrow CN = 2\sqrt{6}$$

$\triangle QPC$ (Relación métrica):

$$a \cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}$$

$$\rightarrow a = 6$$

$$\therefore V = 6^3 = 216$$

Rpta.: A

$$\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + x^2$$

$$\frac{2a^2}{4} = x^2$$

$$\therefore \frac{a\sqrt{2}}{2} = x$$

$$r = \frac{S_{\text{oct}}}{S_{\text{icos}}}$$
$$a_{\text{oct}} = 3 a_{i\cos}$$

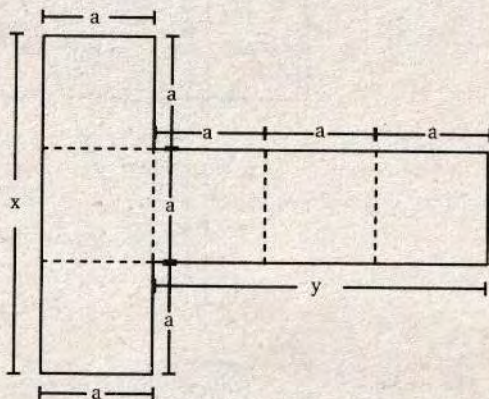
$$\Rightarrow r = \frac{2(a_{\text{oct}})^2 \sqrt{3}}{5(a_{\text{icos}})^2 \sqrt{3}}$$

$$r = \frac{2(3a_{\text{icos}})^2}{5(a_{\text{icos}})^2}$$

$$\therefore r = \frac{18}{5}$$

Rpta.: C

Resolución 11:

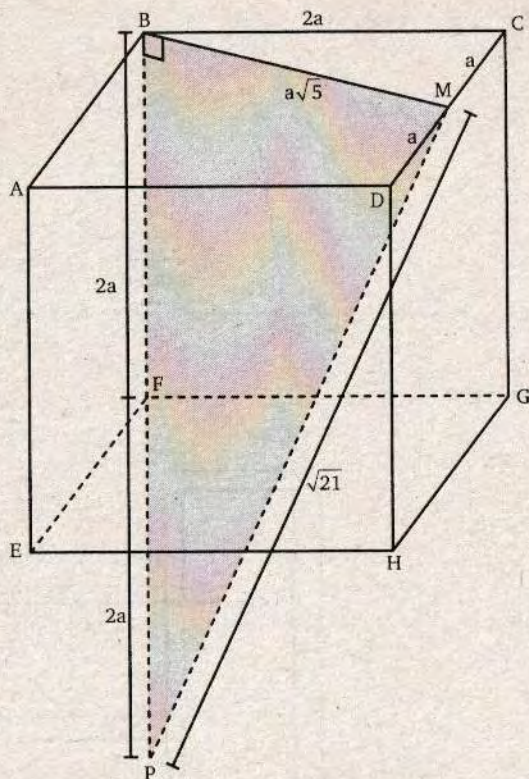


Se observa que:

$$x = y = 3a$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 1$$

Rpta.: E


$$PM = \sqrt{21}$$

Luego en $\triangle PBM$: (Teorema de Pitagoras)

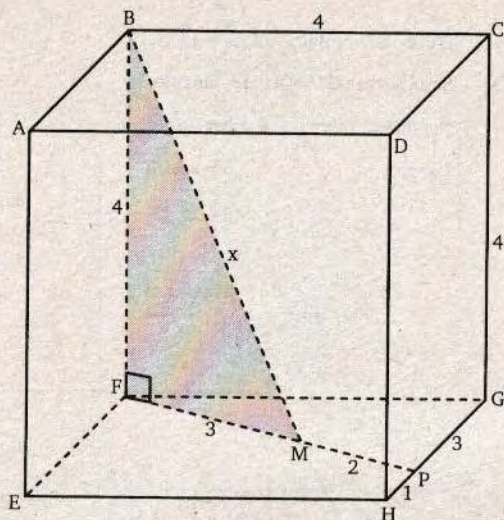
$$\sqrt{21}^2 = (4a)^2 + (a\sqrt{5})^2$$

$$\rightarrow a = 1$$

$$\therefore V_{(\text{cubo})} = [2(1)]^3 = 8$$

Rpta.: E

Resolución 13:



Piden : $BM = x$ datos : arista = 4

$$HP = 1$$

$$PM = 2$$

Se observa: $FM = 3$

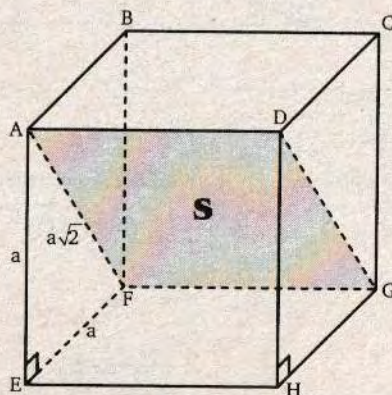
$\triangle BFM$ (Teorema de Pitágoras):

$$x^2 = 4^2 + 3^2$$

$$\therefore x = 5$$

Rpta.: B

Resolución 14:



Piden : $S = ?$, dato : arista = a

Se observa : $\square AFGD$: rectángulo

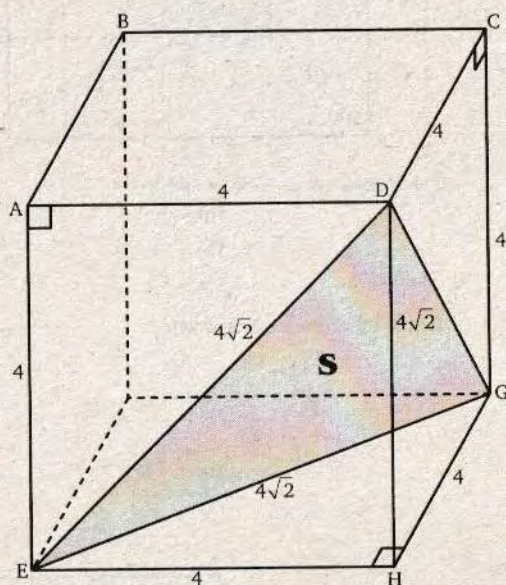
También : $DG = a\sqrt{2}$

Luego: $S = a \cdot a\sqrt{2}$

$$\therefore S = a^2\sqrt{2}$$

Rpta.: D

Resolución 15:



Piden : $S = ?$

Dato : arista = 4

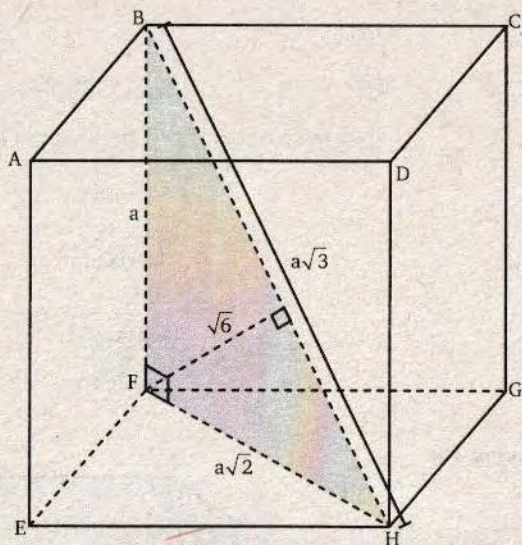
Se observa : $\triangle EDG$: equilátero cuyo lado mide $4\sqrt{2}$

$$\rightarrow S = \frac{(4\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S = 8\sqrt{3}$$

Rpta.: C

Resolución 16:



Piden : $a = ?$

dato : $d(F - \overline{BH}) = \sqrt{6}$

Se observa en $\triangle BFH$

$$FH = a\sqrt{2} \wedge BH = a\sqrt{3} \text{ (T. de Pitagoras)}$$

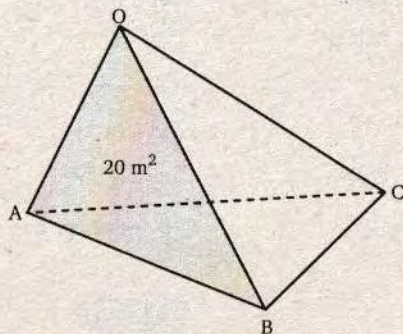
Finalmente:

$$(a)(a\sqrt{2}) = (a\sqrt{3})(\sqrt{6}) \quad (\text{R.M en } \triangle)$$

$$\therefore a = 3$$

Rpta.: D

Resolución 17:



Piden : $S_T = ?$

dato : $S_{(AOB)} = 20 \text{ m}^2$

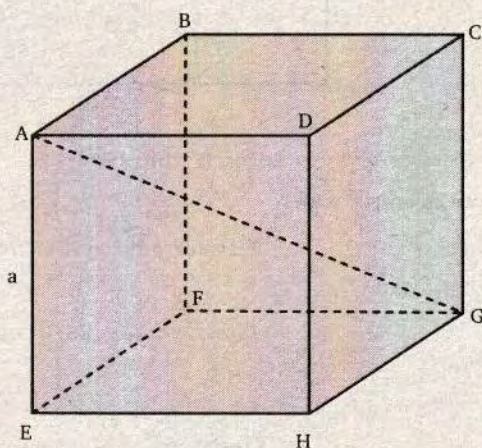
El tetraedro regular tiene 4 caras que son regiones triangulares equiláteras.

$$\rightarrow S_T = 4(20 \text{ m}^2)$$

$$\therefore S_T = 80 \text{ m}^2$$

Rpta.: C

Resolución 18:



Piden : $S_T = 6a^2$

Dato : $AG = 6$

$$\Rightarrow a\sqrt{3} = 6$$

$$\Rightarrow a^2 = 12$$

Luego : $S_T = 6(12)^2$

$$\therefore S_T = 864 \text{ cm}^2$$

Rpta.: C

Resolución 19:

Piden volumen: $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

Donde a es la longitud de la arista

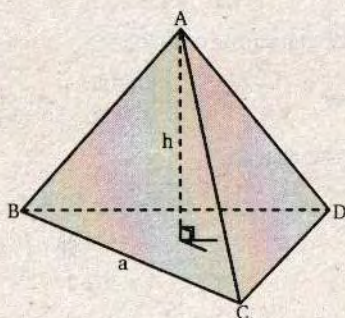
Dato: $6a = 36$

$$\Rightarrow a = 6$$

Luego: $V = \frac{(6)^3 \sqrt{2}}{12}$

$$\therefore V = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Rpta.: E

Resolución 20:

Piden: h

Dato: $S_T = 62,28 \wedge (\sqrt{3} = 1,73)$

$$\Rightarrow a^2 \sqrt{3} = 62,28$$

$$a^2 (1,73) = 62,28$$

$$a^2 = 36$$

$$\Rightarrow a = 6$$

Luego: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$h = \frac{6\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore h = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

Rpta.: C

Resolución 21: Piden: Número de vértices (V)

$$\text{Dato: } \frac{C + V + A}{A + 2} + \frac{360(V - 2)}{90} = 2(A + V) + 14$$

$$\Rightarrow 2A + 2 + 4(V - 2) = 2A + 2V + 14$$

$$4V - 8 = 2V + 12$$

$$2V = 20$$

$$\therefore V = 10$$

Rpta.: C**Resolución 22:** Piden: Número de caras (C).

$$\text{Datos: } \begin{cases} A = 5k \\ C = 3k \end{cases}; 6 < V < 10$$

Por el T. de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$3k + V = 5k + 2$$

$$V = 2k + 2$$

$$\Rightarrow 6 < 2k + 2 < 10$$

$$2 < k < 4$$

$$\Rightarrow k = 3$$

$$\therefore C = 9$$

Rpta.: D**Resolución 23:** Piden: Número de aristas (A).

Datos:

$$\begin{cases} \triangle: n \\ \text{pentágono}: 3n \text{ y } V = 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = 4n$$

Por el Teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$4n + 32 = A + 2$$

$$4n + 30 = A$$

$$\Rightarrow 4n + 30 = \frac{3n + 5(3n)}{2}$$

$$4n + 30 = 9n$$

$$\Rightarrow 6 = n$$

Luego :

$$4(6) + 30 = A$$

$$\therefore 54 = A$$

Rpta.: B

Resolución 24:

Piden : $C + A + V$

$$\text{Datos: } \begin{cases} A = 12k \\ C = V = 7k \end{cases}$$

Por el Teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$7k + 7k = 12k + 2$$

$$\Rightarrow k = 1$$

Luego :

$$C + A + V = 7k + 12k + 7k = 26k$$

$$\therefore C + A + V = 26$$

Rpta.: B

Resolución 25:

Piden el número de diagonales del poliedro (N_{dp}):

Datos:

$$\begin{cases} \text{Hex: } 20 \\ \text{Oct: } 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = 32$$

También : $A = \frac{5 \times 20 + 6 \times 12}{2}$

$$\Rightarrow A = 86$$

Por el teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$\Rightarrow 32 + V = 86 + 2$$

$$\Rightarrow V = 56$$

Luego:

$$N_{DP} = \frac{V(V-1)}{2} - A - N_D$$

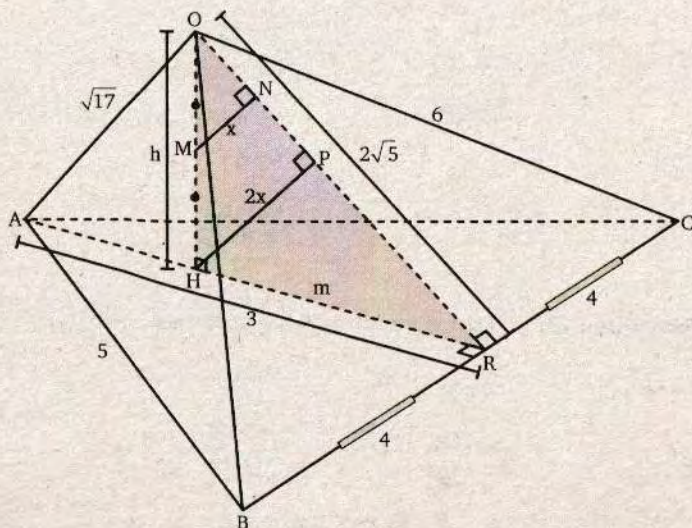
$$\Rightarrow N_{DP} = \frac{56(55)}{2} - 86 - (5 \times 20 + 9 \times 12)$$

$$N_{DP} = 1540 - 86 - 208$$

$$\therefore N_{DP} = 1246$$

Rpta.: B

Resolución 26:



Piden: $MN = x$

$\triangle ABR$ (Notable de 37° y 53°):

$$AR = 3$$

$\triangle OBR$ (Teorema de Pitágoras):

$$6^2 = (OR)^2 + 4^2 \Rightarrow OR = 2\sqrt{5}$$

$\triangle AOR$ (Teorema de Euclides):

$$\sqrt{17}^2 = (2\sqrt{5})^2 + (3)^2 - 2(3)(m)$$

$$\Rightarrow m = 2$$

$\triangle OHR$ (Teorema de Pitágoras):

$$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow h = 4$$

$\triangle OHR$ (Relación métrica):

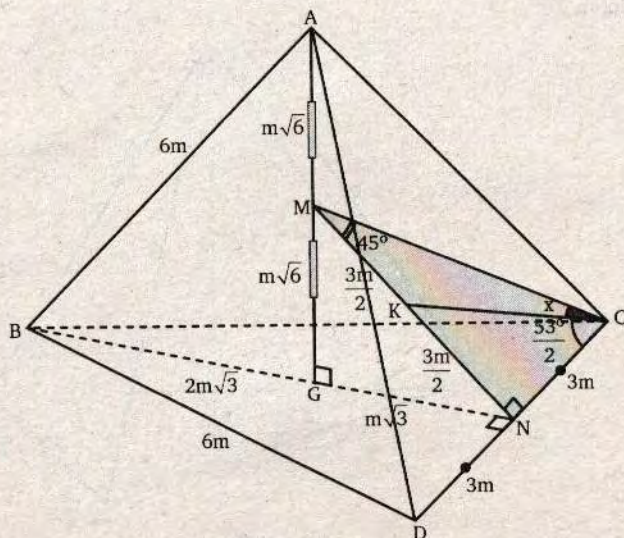
$$(m)(h) = (2\sqrt{5})(2x)$$

$$(4)(2) = 4\sqrt{5}x$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Rpta.: B

Resolución 27:



$$AG = (6n) \frac{\sqrt{6}}{3} = 2m\sqrt{6} \Rightarrow AM = MG = m\sqrt{6}$$

$$(MN)^2 = (m\sqrt{6})^2 + (m\sqrt{3})^2$$

$\Rightarrow \triangle MNC$ (Notable de 45°)

$$m\angle CMN = m\angle MCN = 45^\circ$$

$$\Delta \text{KCN} (\text{Notable de } \frac{53^\circ}{2})$$

Luego : $x + \frac{53^\circ}{2} = 45^\circ$

$$\therefore x = 18,5^\circ$$

Rpta.: A

Piden : $V_{(\text{Tetraedro regular})} = V$; dato : $GH = 2\sqrt{2}$

Trazamos la altura $\overline{DT}$ de la cara CDB.

$\overline{AG}$: altura del tetraedro regular.

En $\triangle AGD$ (relación métrica):

$$\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)\left(\frac{a}{3}\sqrt{6}\right) = (a)(2\sqrt{2})$$

$$\rightarrow a = 6$$

Luego: $V = \frac{6^3\sqrt{2}}{12}$

$$\therefore V = 18\sqrt{2}$$

Rpta.: D

Resolución 29: Piden :

$$\gamma = \frac{V_{(\text{tetraedro})}}{V_{(\text{hexaedro})}}$$

$$\left(\frac{\text{Arista del}}{\text{tetraedro}}\right) = \left(\frac{\text{Arista del}}{\text{hexaedro}}\right) = a$$

Del dato: $V_{(\text{tetraedro})} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

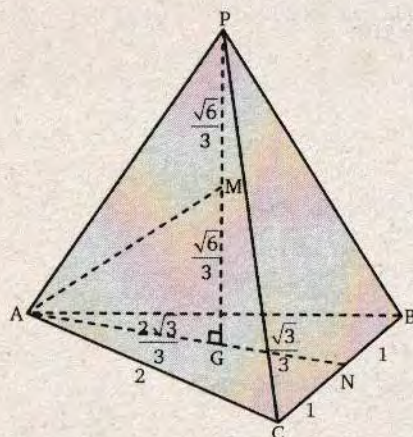
$$V_{(\text{hexaedro})} = a^3$$

En lo que piden: $\gamma = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{a^3}$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Rpta.: B

Resolución 30:

Piden : $AM = x = ?$

Dato : arista = 2

 $PM = MG$ Se sabe : $PG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (altura del tetraedro),

con ello :

$$PM = MG = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

También, se sabe:

G : baricentro del ΔABC , con ello

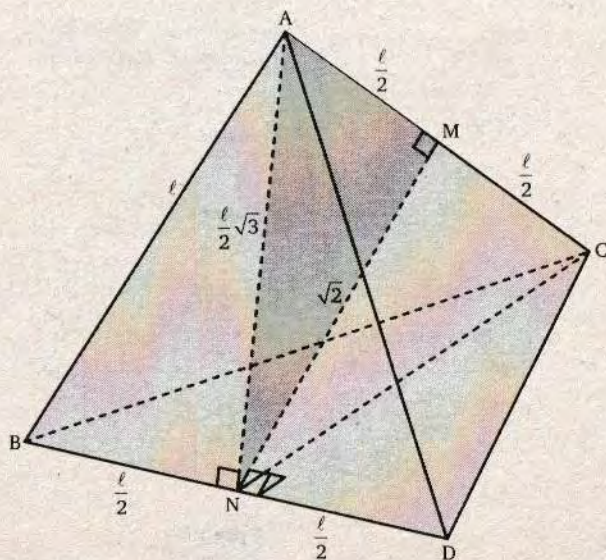
$$NG = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge AG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Luego: } x^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

Rpta.: D

Resolución 31:



Piden : ℓ

Trazamos las alturas $\overline{AN} \wedge \overline{CN}$, luego :

$\overline{NM}$ esta contenido en el plano ANC:

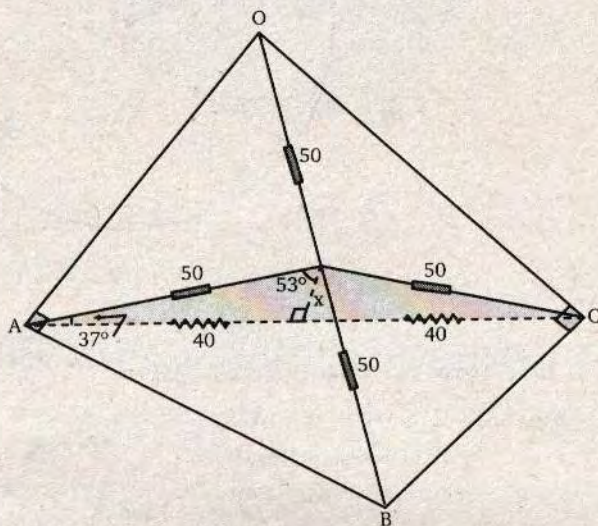
$\triangle AMN$ (Teorema de Pitágoras):

$$\rightarrow \left(\frac{\ell}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$\therefore \ell = 2$$

Rpta.: B

Resolución 32:



Piden $MN = x$

Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$AM = MO = MB = MC = 50$$

$\Rightarrow \triangle AMC$ es Isósceles

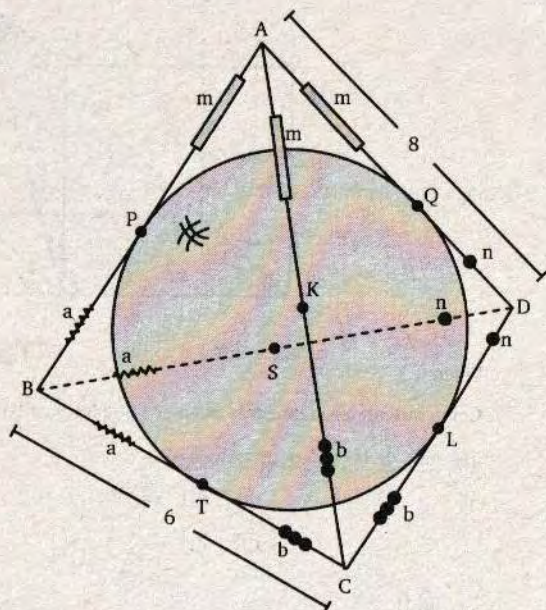
$\Rightarrow \overline{MN}$ es altura

$\triangle AMN$ (Notable de 37° y 53°)

$$\therefore x = 30$$

Rpta.: E

Resolución 34:



Piden la suma de las medidas de todas las aristas : S_A



TEOREMA

Los segmentos de recta tangentes trazados de un punto exterior a una esfera son congruentes.

En el problema:

$$S_A = 3a + 3b + 3m + 3n$$

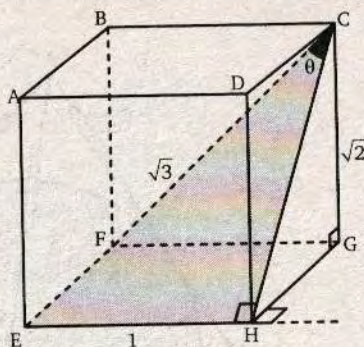
$$S_A = 3(a + b) + 3(m + n)$$

$$S_A = 3(6) + 3(8)$$

$$\therefore S_A = 42$$

Rpta.: A

Resolución 35:



Piden 0

Como buscando una medida angular ; podemos considerar $a = 1$

Teorema de las tres perpendiculares:

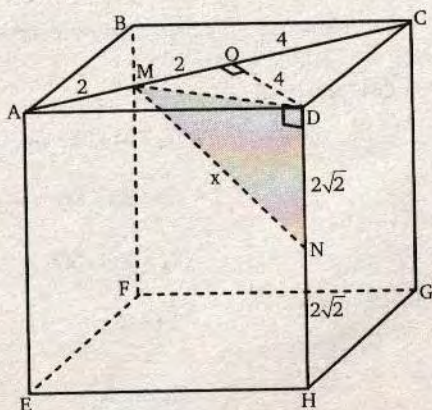
$$\overline{CG} \perp \overline{GH} \wedge \overline{GH} \perp \overline{EH}$$

$$\Rightarrow \overline{CH} \perp \overline{EH}$$

 ECH: $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\therefore \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Rpta.: B

Resolución 36:

Piden : $MN = x$

Datos: $CM = 6$; $AM = 2$; $DN = NH$

Trazamos $\overline{DO} \perp \overline{AC} \rightarrow OC = 4 \wedge OM = 2 \wedge OD = 4$

Con ello, el lado del cubo es igual a $4\sqrt{2}$

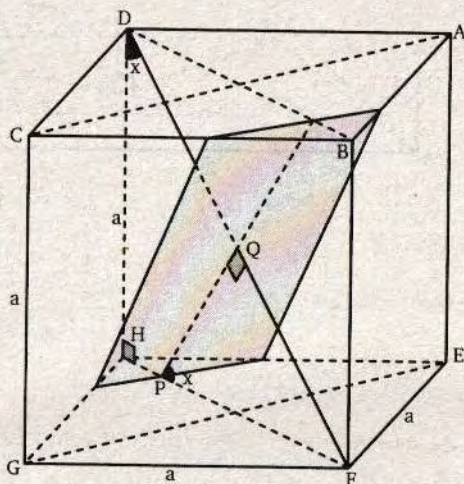
$\rightarrow$ En $\triangle MDN$ (Teorema de Pitágoras).

$$x^2 = (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore x = 2\sqrt{7}$$

Rpta.: B

Resolución 37:



Piden x

$$m\angle FPQ = m\angle FDH = x$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{FH}{HD}$$

$$\tan x = \frac{a\sqrt{2}}{a}$$

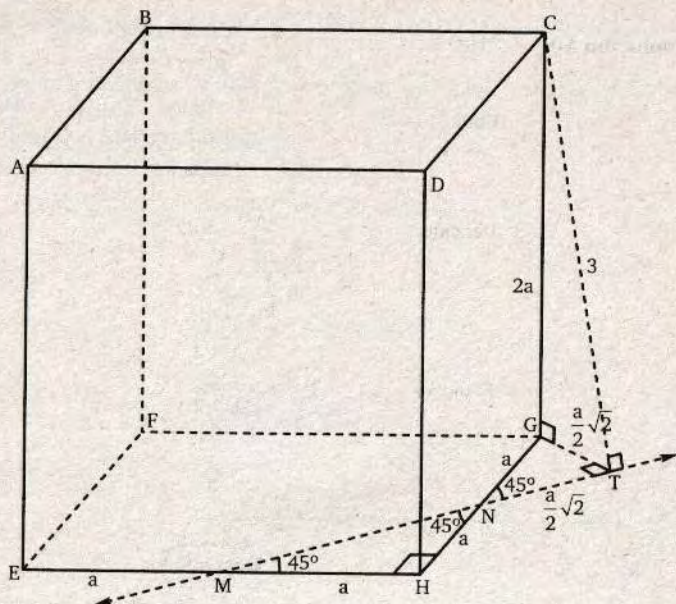
$$\therefore x = \arctan \sqrt{2}$$

Rpta.: A

$$\therefore S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$$

Rpta.: B

Resolución 39:



Piden : $S_{T(\text{cubo})}$

Dato: $CT = 3 \text{ m}$

Prolongamos $\overline{MN}$, luego trazamos $\overline{GT} \perp \overline{MN}$, con ello

$\overline{CT} \perp \overline{MN}$ (Teorema de las 3 perpendiculares)

Del gráfico, en $\triangle CGT$ (Teorema de Pitágoras):

$$3^2 = (2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2$$

$$\rightarrow a = \sqrt{2}$$

Entonces:

$$S_T = 6(2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore S_T = 48 \text{ u}^2$$

Rpta.: D

Resolución 40:

Piden:

$$\gamma = \frac{V_{\text{(Tetraedro regular)}}}{V_{\text{(octaedro regular)}}$$

Dato:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Altura} \\ \text{Tetraedro regular} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Diagonal} \\ \text{Octaedro regular} \end{array} \right)$$

$$\text{arista} = a \qquad \qquad \text{arista} = b$$

Del dato:

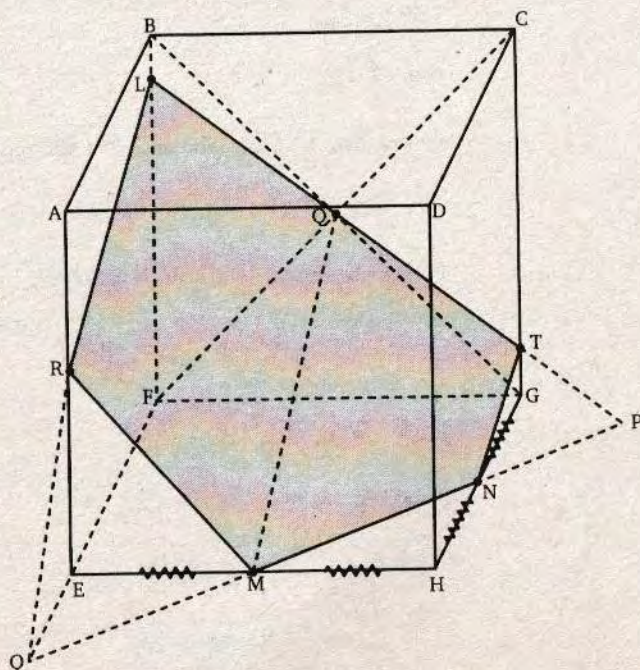
$$\frac{a\sqrt{6}}{3} = b\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

Entonces:

$$\gamma = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{b^3\sqrt{2}}{3}}$$

$$\therefore \gamma = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Rpta.: C**Resolución 41:**

Se prolonga $\overline{FG}$ y $\overline{FE}$ hasta intersectarlos con $\overline{MN}$ en P y Q respectivamente.

Ahora prolongamos $\overline{PQ}$ hasta intersectarlo con $\overline{BF}$ en L; y también trazamos

$\overline{LQ}$ el cual intersecta con $\overline{AE}$ en R.

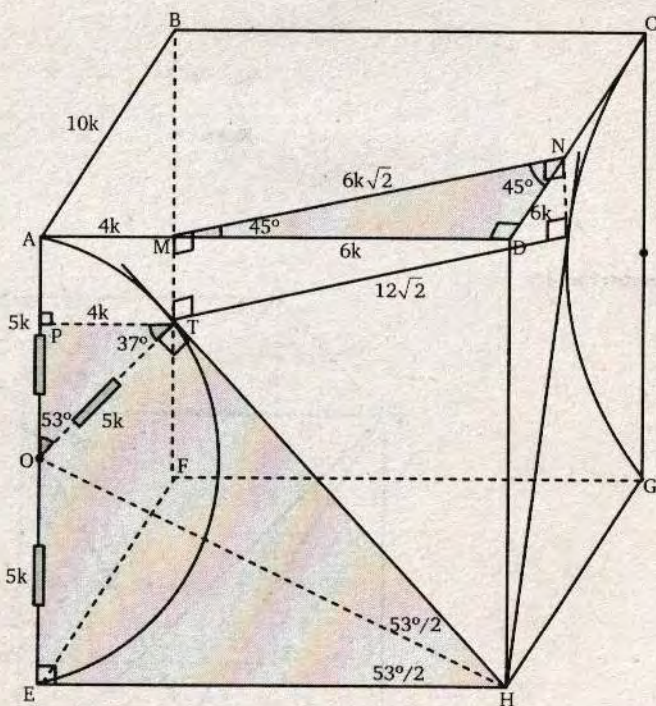
Luego obtenemos la sección determinada en el cubo:

◻ LRMNT

∴ Es una región pentagonal

Rpta.: E

Resolución 42:



Piden AG

$$\triangle OEH \left(\text{Notable de } \frac{53^\circ}{2} \right)$$

$$\Rightarrow m\angle OHE = m\angle OHT = \frac{53^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow m\angle EHT = 53^\circ$$

$\square OEHT$: inscriptible

$$\Rightarrow m\angle AOT = m\angle EHT = 53^\circ$$

$\triangle OTP$ (Notable de 37° y 53°)

$$\Rightarrow AB = 2(5k) = 10k \text{ y } AM = 4k$$

$$\Rightarrow MD = 6k$$

$\triangle MDN$ (Notable de 45°)

$$\Rightarrow MN = 6k\sqrt{2}$$

Del dato: $6k\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

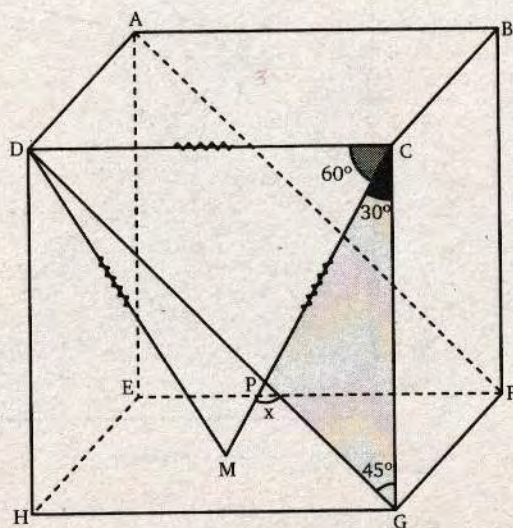
$$k = 2$$

Luego: $AG = (10k)\sqrt{3}$

$$\therefore AG = 20\sqrt{3}$$

Rpta.: C

Resolución 43:



Trazamos en la cara CDHG el segmento $\overline{DG} \parallel \overline{AF}$

Entonces la medida buscada será:

$$m\angle mPE = x$$

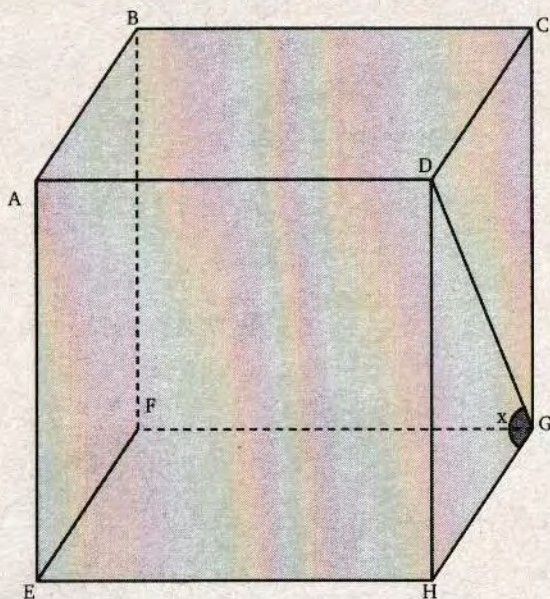
$\triangle CPE$:

$$x = 50^\circ + 45^\circ$$

$$\therefore x = 75^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 44:



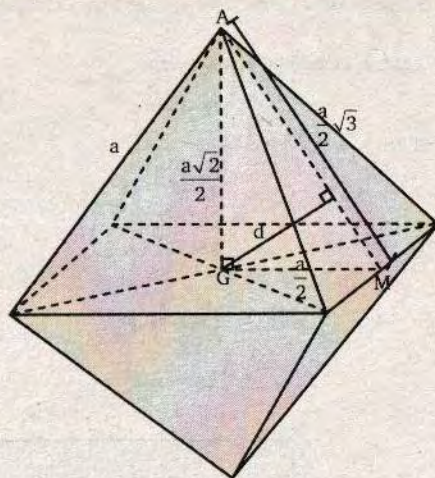
Como $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$; la medida del ángulo buscado será

$$m\angle HGD = x$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 45:



Piden : a

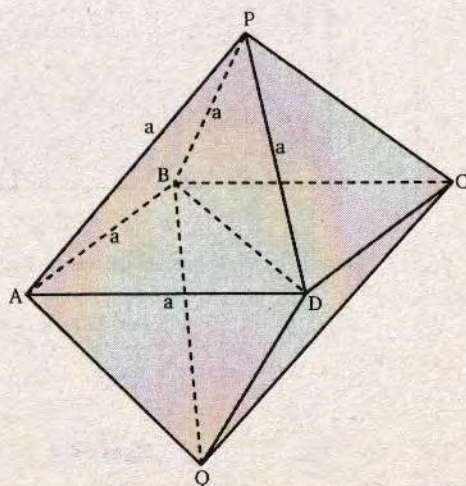
△AGM (Relación métrica)

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore a = d\sqrt{6}$$

Rpta.: E

Resolución 46:



Piden : Volumen del octaedro regular (V).

Dato: $S_{(P-ABD)} = 2(\sqrt{3} + 2)$

Del dato: $S_{(P-ABD)} = S_{(PBA)} + S_{(PBD)} + S_{(BAD)}$

$$2(\sqrt{3} + 2) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$2(\sqrt{3} + 2) = \frac{a^2(\sqrt{3} + 2)}{2}$$

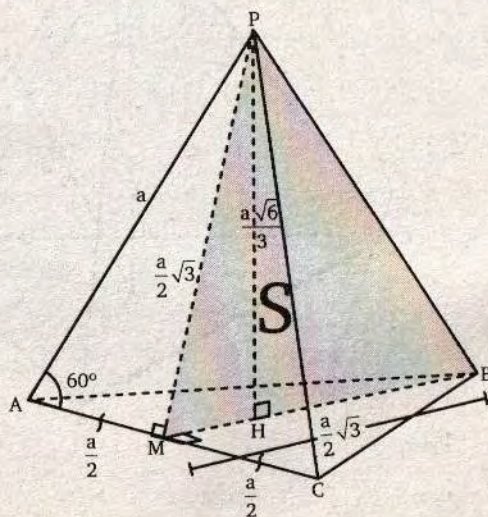
$$\rightarrow a = 2$$

Entonces: $V = \frac{(2)^3\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore V = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

Rpta.: D

Resolución 47:



Piden : S

Se observa: el plano PBM es un plano de simetría

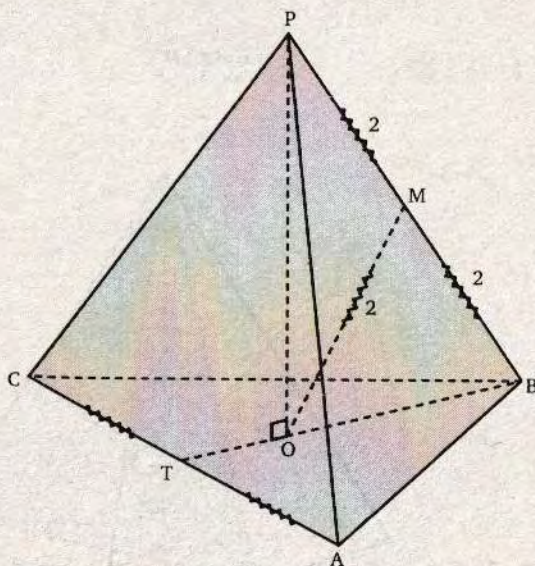
También : $PM = MB = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Luego: $PH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \dots (\text{altura})$

$$\Rightarrow S = \frac{a}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

Rpta.: C

Resolución 48:Piden : S_T dato : $OM = 2$ Se observa : $PO \perp TB$, con ello :

△ POB :

$\overline{OM}$ es mediana relativa a la hipotenusa

$$\rightarrow OM = PM = MB = 2$$

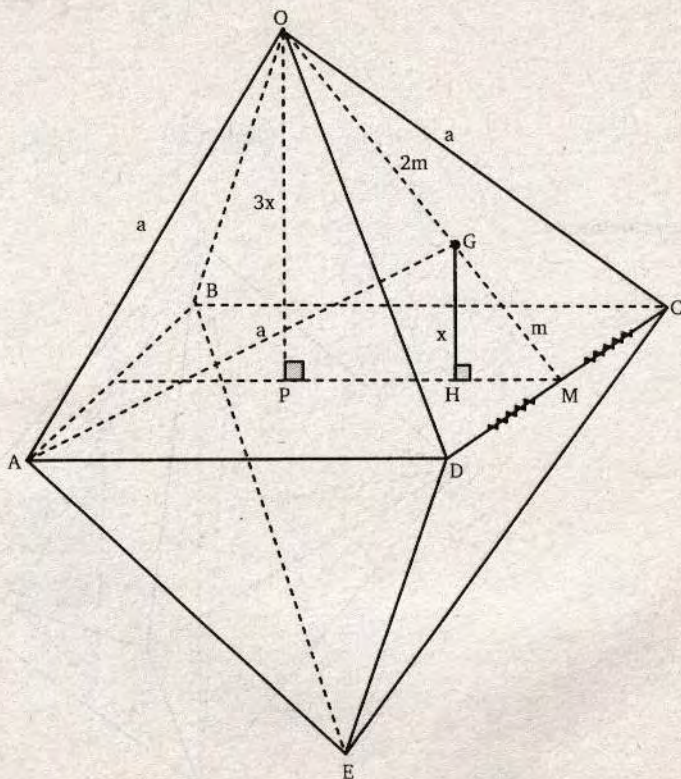
$$\text{arista: } a = 4$$

$$\rightarrow S_T = 4^2 \sqrt{3}$$

$$\therefore S_T = 16\sqrt{3}$$

Rpta.: B

Resolución 49:



Piden $GH = x$

Datos: $\begin{cases} G: \text{baricentro} \\ AG = 3\sqrt{2} \end{cases}$

Teorema para el octaedro regular:

$$AG = OA = a$$

$$\Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

Como $OM = 3(GM) \Rightarrow OP = 3(GH)$

$$\Rightarrow OP = 3x$$

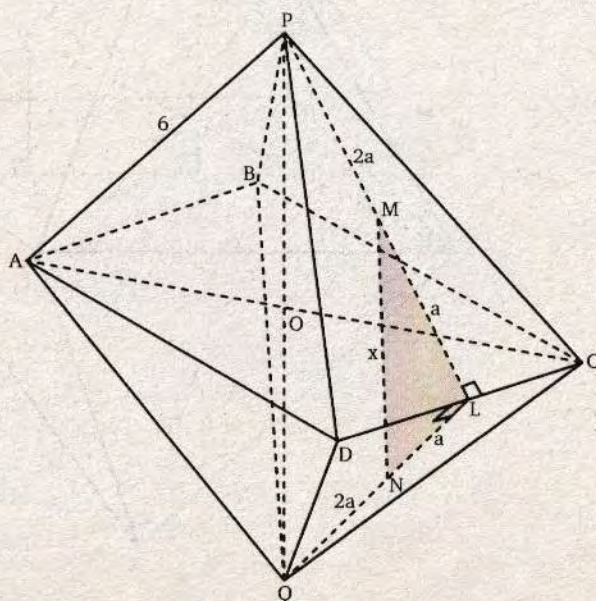
Teorema: $OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow 3x = 3\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\therefore x = 1$$

Rpta.: A

Resolución 50:



Piden : $MN = x$

Datos: arista = 6; $M \wedge N$ son centros

Trazamos la diagonal $\overline{PQ}$ ($PQ = 6\sqrt{2}$)

Trazamos $\overline{PL} \wedge \overline{QL}$ (alturas de dos caras)

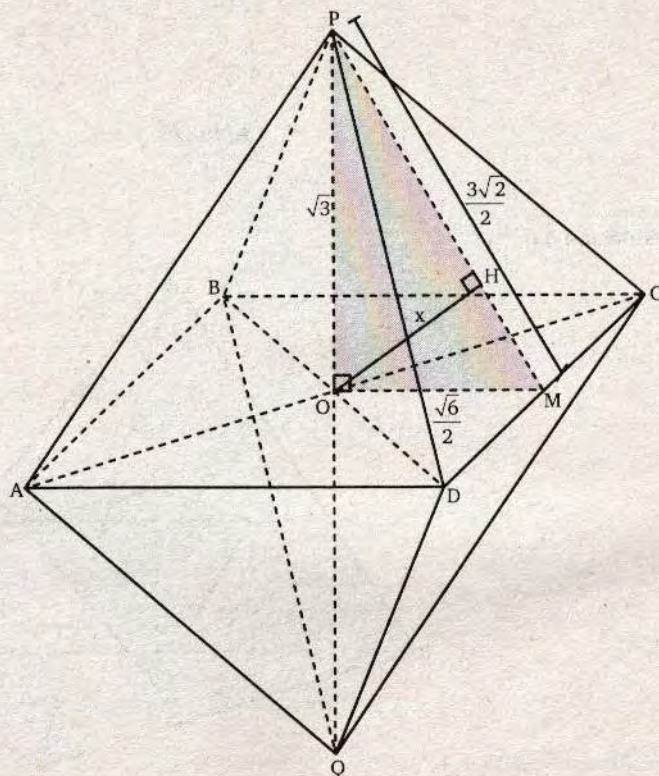
En $\triangle PLQ : \overline{MN} \parallel \overline{PQ}$

$$\triangle MLN \sim \triangle PLQ: \quad \frac{x}{6\sqrt{2}} = \frac{a}{3a} \text{ (Semejanza)}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

Rpta.: A

Resolución 51:



Piden :

$$OH = x$$

Dato:

$$AB = a = \sqrt{6}$$

 $\overline{PQ}$: Diagonal:

$$PQ = a\sqrt{2} \Rightarrow PQ = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow PO = \sqrt{3}$$

$$OM = \frac{a}{2} \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

 $\overline{PM}$: Altura del triángulo equilátero DPC.

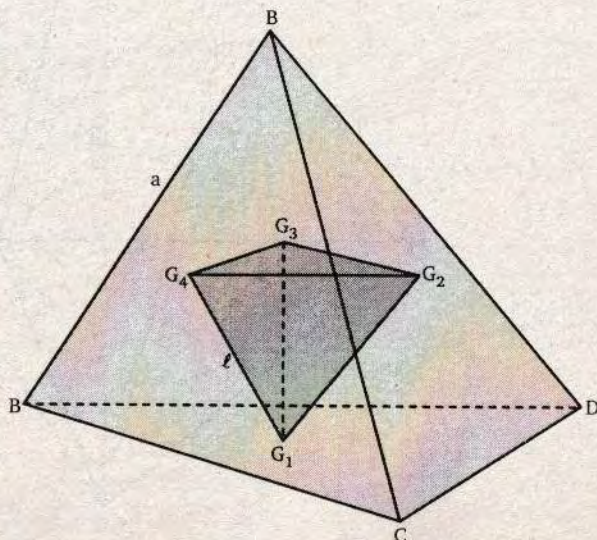
$$\Rightarrow PM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow PM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

 $\triangle POM$ (Relación métrica):

$$(\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)(x)$$

$$\therefore x = 1$$

Rpta.: E**Resolución 52:**

Piden el volumen (V_x) del conjugado del tetraedro regular ABCD.

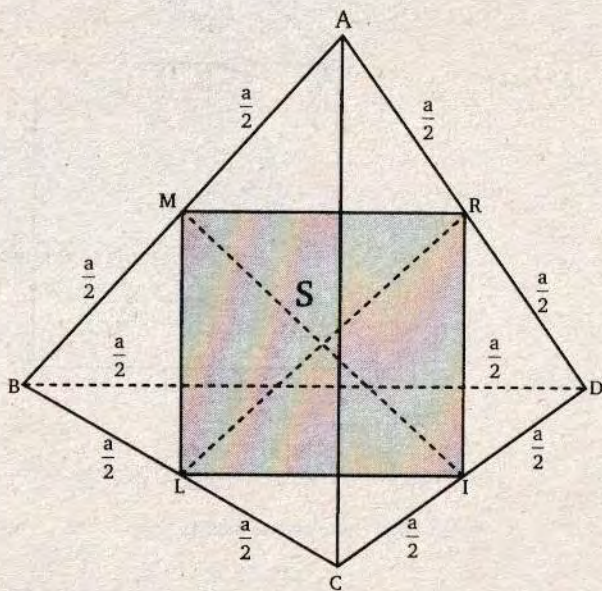
Se sabe que: $\ell = \frac{a}{3}$

$$\Rightarrow V_x = \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$\therefore V_x = \frac{a^3 \sqrt{2}}{324}$$

Rpta.: E

Resolución 53:



Piden el área total del tetraedro regular: S_T

Dato: $S = 3 \text{ m}^2$

Por bases medias: $MR = RI = IL = LM = \frac{a}{2}$

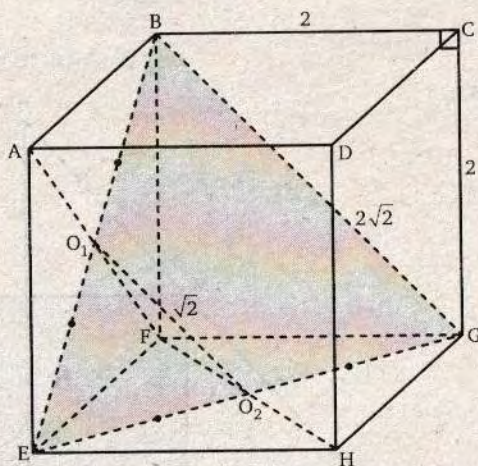
Además MRIL es una cuadrado; pues sus lados congruentes y sus diagonales $\overline{MI}$ y $\overline{RL}$ también son congruentes.

$$\rightarrow S = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 3 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$$

Luego:

$$S_T = a^2 \sqrt{3} = (2\sqrt{3})^2 \sqrt{3}$$

$$\therefore S_T = 12\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Rpta.: C**Resolución 54:**Piden: V_{cubo}

$$\text{Datos: } O_1 O_2 = \sqrt{2}$$

 $\triangle EBG : \overline{O_1 O_2}$ es base media:

$$\Rightarrow BG = 2\sqrt{2}$$

 $\triangle BCG$ (Notable de 45°):

$$BC = CG = 2 = a$$

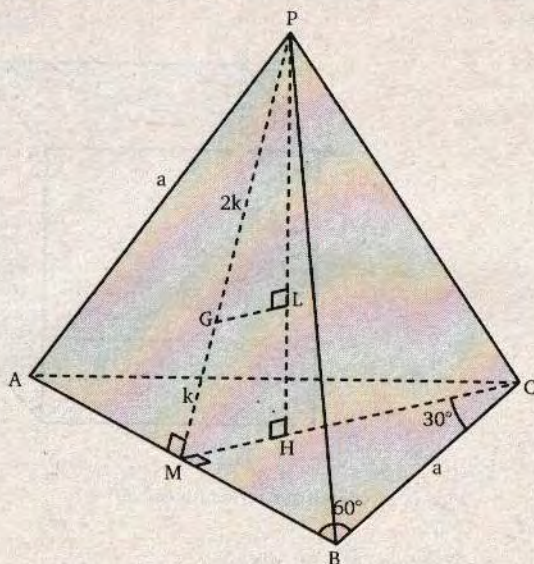
Luego:

$$V_{\text{cubo}} = a^3 = 2^3$$

$$\therefore V_{\text{cubo}} = 8 \text{ u}^3$$

Rpta.: E

Resolución 55:



Piden: a

Dato: $GH = \sqrt{5}$ (G: Baricentro de ΔAPB).

$PGL \sim PMH$:

$$\frac{MH}{5} = \frac{3k}{2k}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{15}{2}$$

Como H es baricentro del ΔABC :

$$\Rightarrow MC = \frac{45}{2}$$

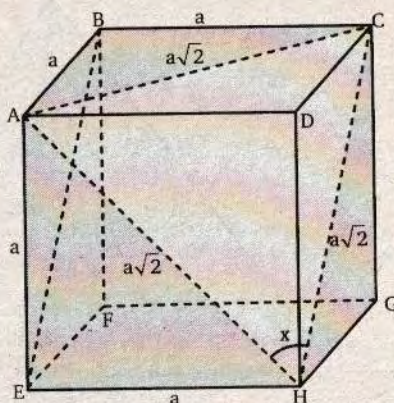
BCM (Notable de 30° y 60°)

$$MC = \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{45}{2}$$

$$\therefore a = 15\sqrt{3}$$

Rpta.: A

Resolución 56:



Piden : $m \angle$ que forma $\overline{BE}$ con $\overline{AH} = ?$

Trazamos $\overline{CH} // \overline{BE}$, con ello:

$m \angle AHC = x$, es lo que piden

Se observa :

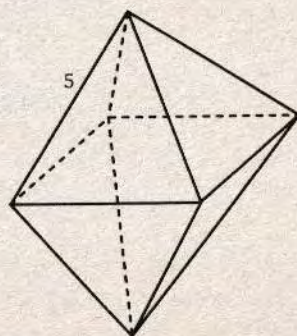
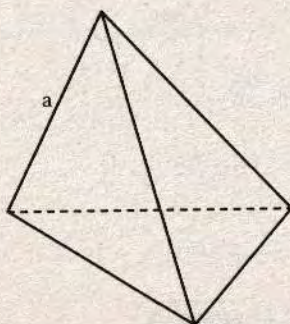
$\triangle AHC$: Equilátero

$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: C

Resolución 57:

Sean las áreas totales S_1 y S_2 del tetraedro y octaedro regulares respectivamente



Δ NOM (Teorema de Pitágoras):

$$(2\sqrt{3})^2 = \left(\frac{a}{6}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \rightarrow a = 4\sqrt{3}$$

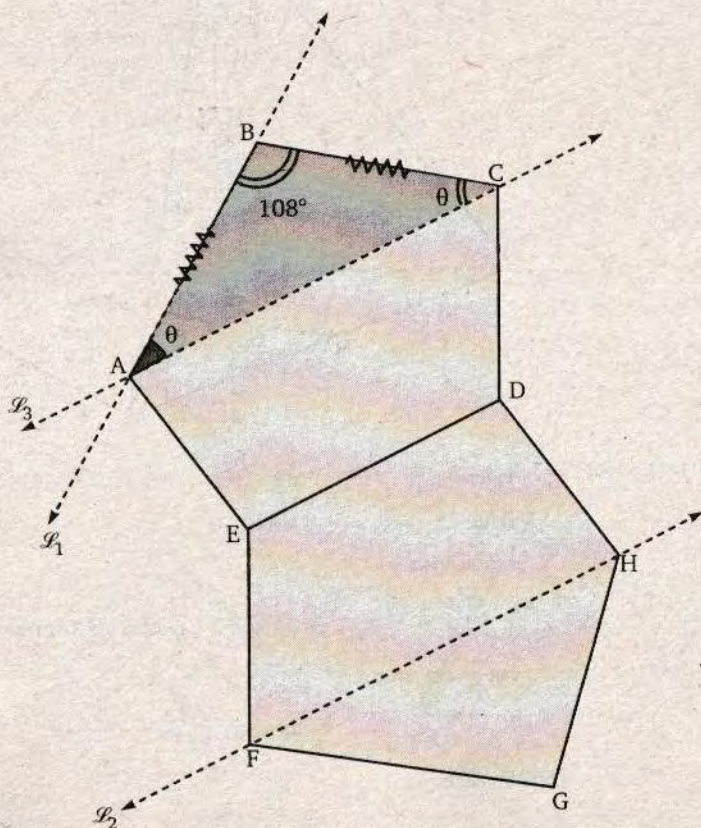
Luego:

$$h = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore h = 4\sqrt{2}$$

Rpta.: B

Resolución 59:



Piden: ángulo formado por $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2 : \theta$

Se observa que:

$$\mathcal{L}_2 // \overline{ED} // \mathcal{L}_3$$

$$\Rightarrow \text{Del } \triangle ABC : 2\theta + 108^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 36^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 60: Piden el número de aristas: A

Datos:

$$* C = V$$

Del teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$2C = A + 2 \quad \dots(I)$$

$$** S = 1440^\circ$$

$$\Rightarrow 360(A - C) = 1440^\circ$$

$$A - C = 4$$

$$2A - 2C = 8 \quad \dots(II)$$

(I) en (II):

$$2A - (A + 2) = 8$$

$$\therefore A = 10$$

Rpta.: B

Resolución 61: Piden el número de aristas: A

$$1 \diamond \longrightarrow 5 \text{ aristas}$$

$$2 \square \longrightarrow 8 \text{ aristas}$$

$$3 \triangle \longrightarrow 9 \text{ aristas}$$

$$C = 6$$

$$A = \frac{5 + 8 + 9}{2}$$

$$\therefore A = 11$$

Rpta.: B

Resolución 62: Piden número de caras del poliedro: x

Caso inicial:

$$x \diamond \rightarrow A_1 = \frac{5x}{2}$$

Caso final:

$$(x + 20) \Delta \rightarrow A_2 = \frac{3(x + 20)}{2}$$

Pero:

$$A_1 = A_2$$

$$\rightarrow \frac{5x}{2} = \frac{3}{2}(x + 20)$$

$$\therefore x = 30$$

Rpta.: C**Resolución 63:** Piden número de caras: C

Datos:

$$\underbrace{C + V + A}_{A+2} = 30 \quad \dots (\text{Por el teorema de Eucler})$$

$$\Rightarrow 2A + 2 = 30$$

$$\Rightarrow A = 14 \quad \dots (I)$$

$$** 5 = 1800^\circ$$

$$360(A - C) = 1800^\circ$$

$$\Rightarrow A - C = 5 \quad \dots (II)$$

(I) en (II):

$$14 - C = 5$$

$$\therefore C = 9$$

Rpta.: C

Resolución 64: Piden número de caras: C

Dato:

$$S_{\text{int.}} = 1800^\circ$$

$$\rightarrow 360^\circ(V - 2) = 1800^\circ$$

$$\therefore V = 7$$

Dato:

$$C + V + A = 30$$

$$A + 2 + A = 30$$

$$\rightarrow A = 14$$

Teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$C + 7 = 14 + 2$$

$$\therefore C = 9$$

Rpta.: B

Resolución 65: Piden : m = ?

V = 33(V : # vértices)

$$\begin{array}{ll} 8\Delta & \rightarrow 24 \text{ aristas} \\ 9\square & \rightarrow 36 \text{ aristas} \\ m\bigcirc & \rightarrow 5m \text{ aristas} \end{array}$$

$$C = 17 + m \quad A = \frac{24 + 36 + 5m}{2} = 27 + \frac{5m}{2}$$

Teorema de Euler:

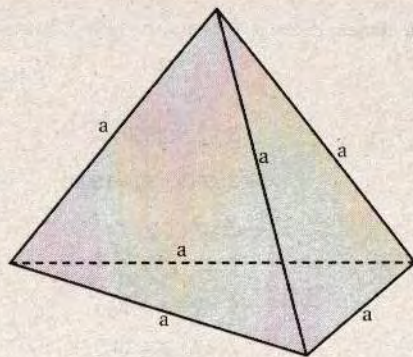
$$C + V = 2 + A$$

$$\rightarrow 17 + m + 33 = 2 + 27 + \frac{5m}{2}$$

$$\frac{3m}{2} = 21$$

$$\therefore m = 14$$

Rpta.: E

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 09**Resolución 66:**

Piden : S_{Total}

Dato : $6a = 48$

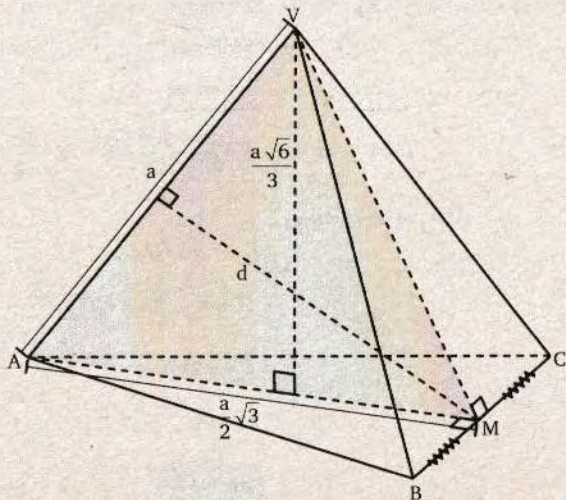
$$\Rightarrow a = 8$$

Luego:

$$S = a^2 \sqrt{3}$$

$$\therefore S = 64\sqrt{3}$$

Rpta.: C

Resolución 67:

Piden: a

Calculamos el área de la región triangular AVM:

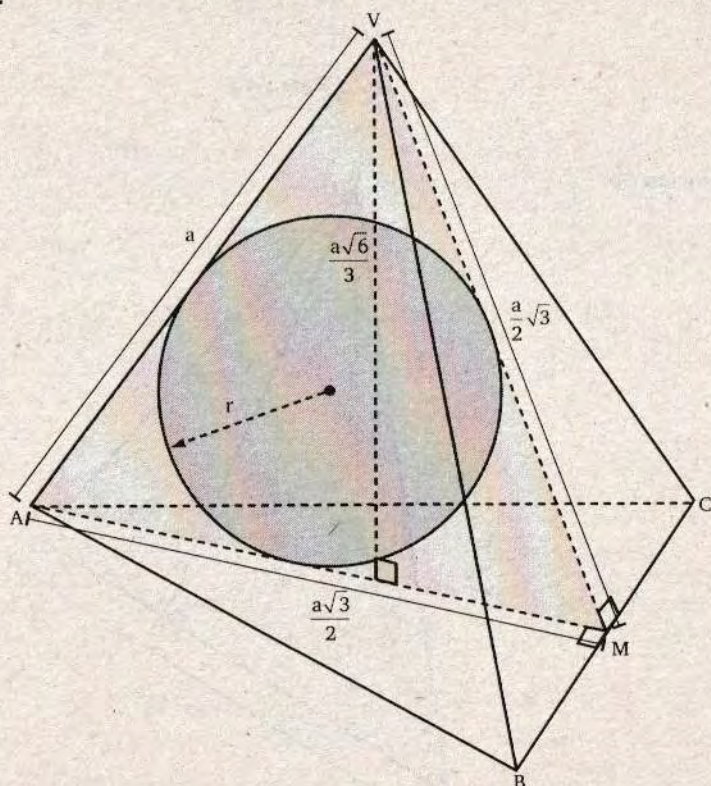
$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \sqrt{3} \right) \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} \right) = \frac{1}{2} (a)(d)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a = d$$

$$\therefore a = d\sqrt{2}$$

Rpta.: E

Resolución 68:



Piden : S_{ABC}

Dato:

$$S = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow S = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{4} \quad \dots(I)$$

ΔAVC :

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{a^2c^2}{a^2 + c^2}$$

ΔBVH :

$$h^2 = b^2 + m^2$$

$$h^2 = b^2 + \frac{a^2c^2}{a^2 + c^2}$$

$$h^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + c^2} \quad \dots(II)$$

(I) en (II):

$$h^2 = \frac{45}{a^2 + c^2}$$

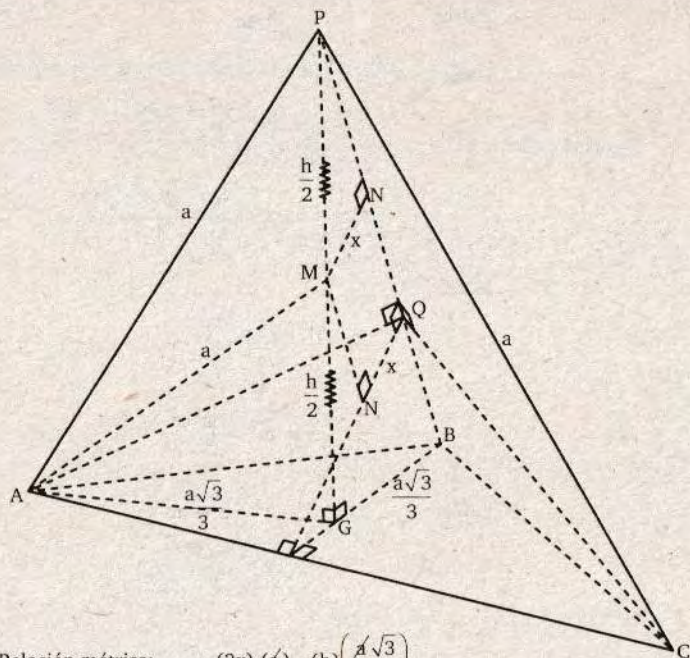
$$h = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Luego:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} = \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\therefore S_{ABC} = \sqrt{5}$$

Rpta.: E

Resolución 70:

Relación métrica: $(2x) (\lambda') = (h) \left(\frac{\lambda' \sqrt{3}}{3} \right)$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6}h \quad \dots(I)$$

△AMG (Teorema de pitágoras)

$$(3)^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow q = \frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}$$

$$\Rightarrow q = \frac{h^2}{4} + \frac{\left(\frac{3h}{\sqrt{6}}\right)^2}{3}$$

$$q = \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{3} \quad \dots(\text{II})$$

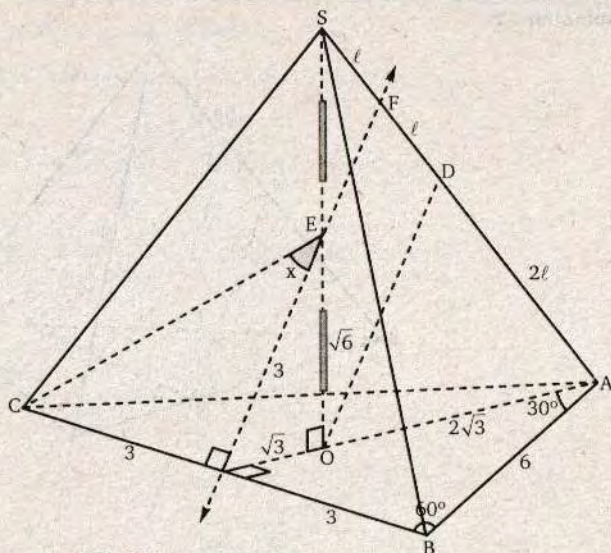
(II) en (I):

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6} = h = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x = 1$$

Rpta.: C

Resolución 71:



Piden : $m\angle (\overline{OD} - \overline{CE})$

Trazamos $\overline{EF} \parallel \overline{OD} \Rightarrow SF = FD = \ell$

Trazamos $\overline{EM}$ (M punto medio de $\overline{AB}$).

ΔABC (O: Baricentro):

$$\frac{AO}{OM} = \frac{AD}{DF} = \frac{2}{1}$$

$\Rightarrow$ M; E y F son colineales y la medida buscada será:

$$m\angle CEM = x$$

Teorema de las tres perpendiculares:

$$\overline{EO} \perp \overline{OM} \wedge \overline{OM} \perp \overline{MC} \Rightarrow \overline{EM} \perp \overline{MC}$$

Sea $AB = 6$

$$\Rightarrow CM = 3; MO = \sqrt{3} \wedge EO = \sqrt{6}$$

$$\left(\text{pues : } SO = h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \right)$$

$\triangle MOE$ (Teorema de Pitágoras):

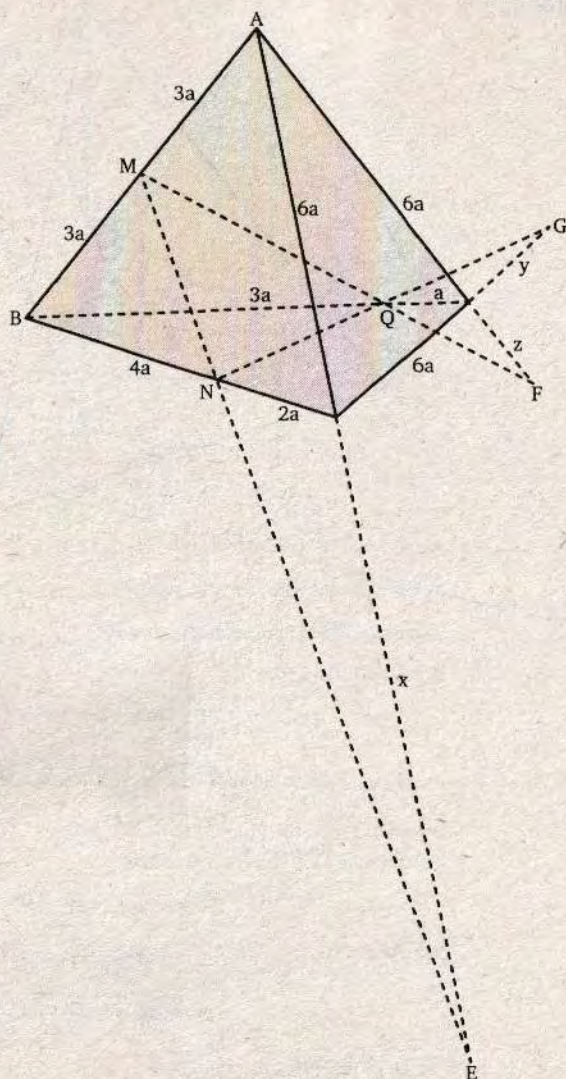
$$(EM)^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{6}^2 \Rightarrow EM = 3$$

$\triangle CEM$ (Notable de catetos congruentes):

$$\therefore x = 45^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 72:



$$\text{Piden: } \frac{CE - DG}{DF} = \frac{x - y}{z}$$

Sea : $AB = 6a$; según los datos:

$$\begin{cases} AM = MB \\ BQ = 5(QD) \\ BN = 2(NC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = MB = 3a \\ BQ = 5a \wedge QD = a \\ BN = 4a \wedge NC = 2a \end{cases}$$

En virtud del teorema de Menelao:

$$\triangle ABC \text{ (secante } \overline{ME}) : (3a)(4a)(x) = (3a)(2a)(x + 6a)$$

$$\Rightarrow x = 6a$$

$$\triangle CBD \text{ (secante } \overline{NG}) : (2a)(5a)(y) = (4a)(a)(y + 6a)$$

$$\Rightarrow y = 4a$$

$$\triangle ABD \text{ (secante } \overline{MF}) : (3a)(5a)(z) = (3a)(a)(z + 6a)$$

$$\Rightarrow z = \frac{3a}{2}$$

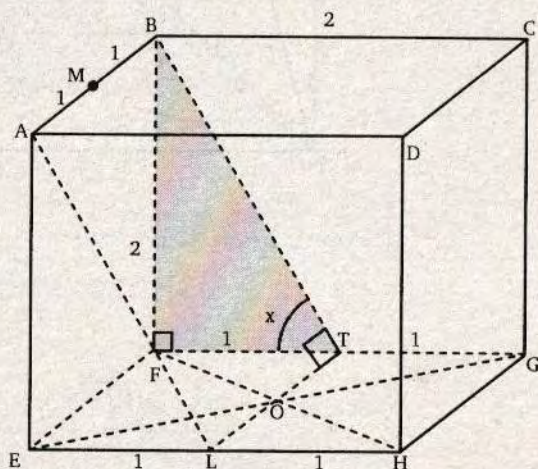
Luego:

$$\frac{x-y}{z} = \frac{6a-4a}{\frac{3a}{2}}$$

$$\therefore \frac{x-y}{z} = \frac{4}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 73:



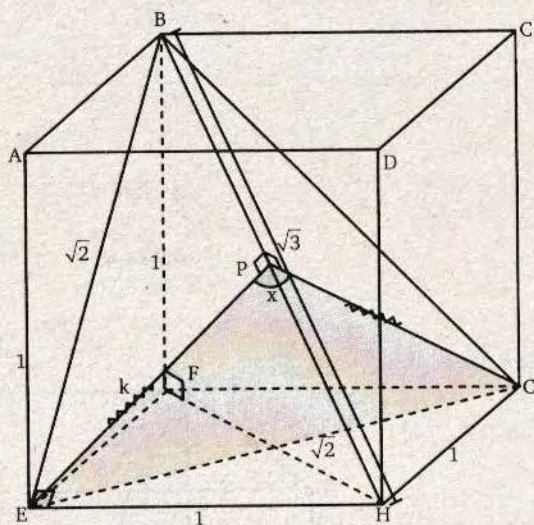
Piden : $m\angle (\square MBN \text{ y } \square FND)$

$$\square MON \subset \square ABTL \wedge \square FND \subset \square EFGH$$

Como $\overline{BT} \perp \overline{TL} \wedge \overline{FT} \perp \overline{TL}$:

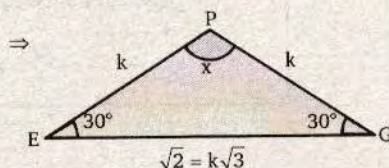
$$x = m\angle BTF$$

$$\begin{aligned}\triangle BFN: \quad \tan x &= \frac{2}{1} \\ \tan x &= 2 \\ \therefore x &= \tan^{-1}(2)\end{aligned}$$

Rpta.: A**Resolución 74:**Piden x

Calculamos el área de la región BEH:

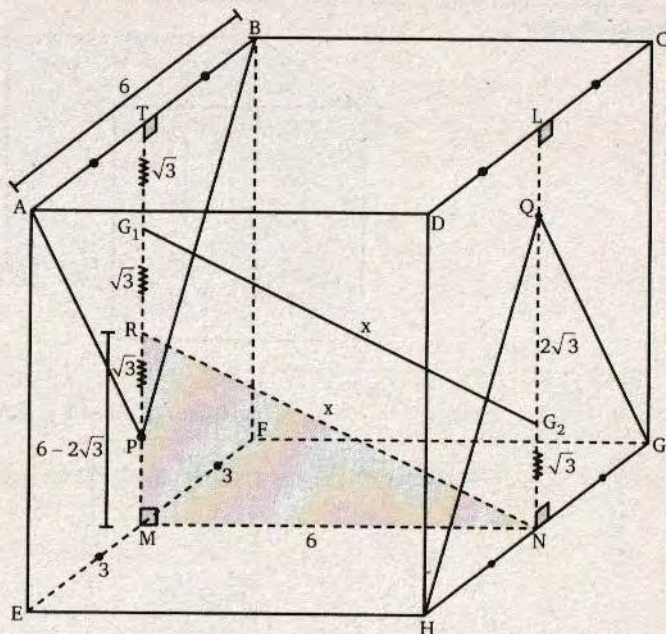
$$S = \frac{(\sqrt{3})(k)}{2} = \frac{(1)(\sqrt{2})}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



$$\therefore x = 120^\circ$$

Rpta.: A

Resolución 75:



Piden $G_1G_2 = x$

Dato: $AB = 6$ (Longitud de la arista del cubo)

G_1 y G_2 : baricentros

$$\Rightarrow G_1P = 2(G_1T) \wedge QG_2 = 2(G_2N)$$

Trazamos $\overline{RN} \parallel \overline{G_1G_2}$

$\Rightarrow G_1G_2NR$ es un paralelogramo

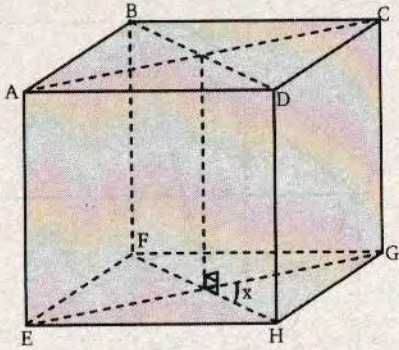
$$\Rightarrow G_1R = G_2N = RP = \sqrt{3} \wedge RN = x$$

$$\triangle MRN: \quad x^2 = 6^2 + (6 - 2\sqrt{3})^2$$

$$\therefore 2\sqrt{21 - 6\sqrt{3}} \mu$$

Rpta.: A

Resolución 76:



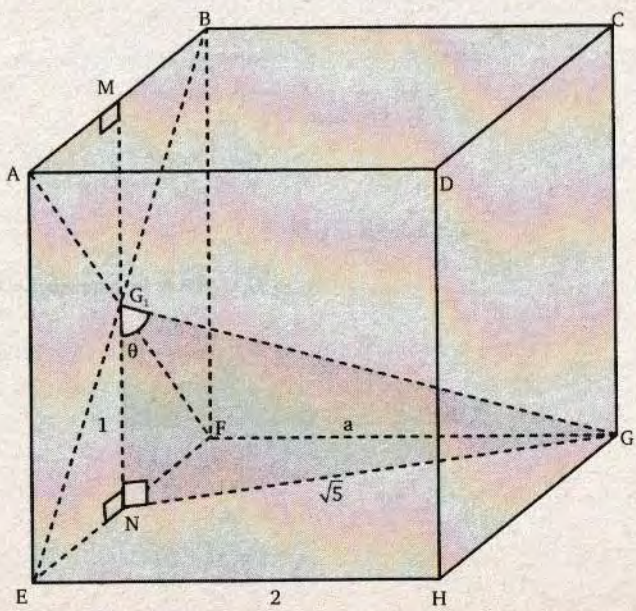
Piden : $m\angle \text{Diedro} (\square BDHF \text{ y } \square ACGE) = x$

Se observa : $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ (diagonales del cuadrado EFGH)

$\therefore x = 90^\circ$

Rpta.: C

Resolución 77:



Piden $m\angle$ determinado por $\overline{AE}$ y $\overline{EG}_1$

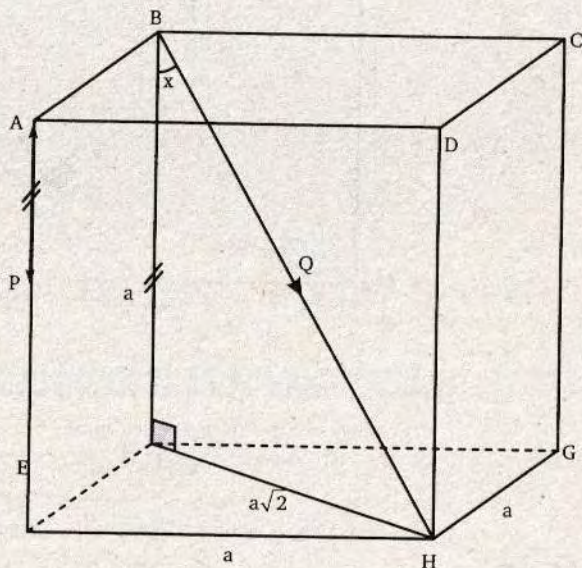
$\Rightarrow$ Trazamos $\overline{MN} \parallel \overline{AE}$ ($M \in AB \wedge N \in ED$)

$\Rightarrow$ El ángulo buscado será: $\angle GG_1N$

$$\therefore \theta = \arctan \sqrt{5}$$

Rpta.: C

Resolución 78:



Piden: $m\angle (\overline{AP} \text{ y } \overline{BQ}) = x$

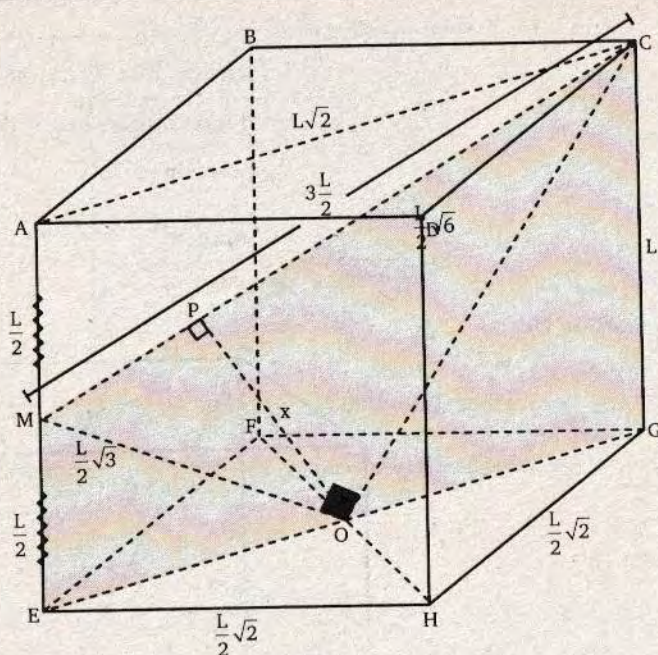
Como: $\overline{BF} \parallel \overline{AP} \rightarrow m\angle FBQ = x$

$\triangle BFH$:

$$\tan x = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\therefore x = \tan^{-1}(\sqrt{2})$$

Rpta.: C



MO; OC y MC

$$\Rightarrow m \angle MOC = 90^\circ$$

Δ MOC (Relación métrica)

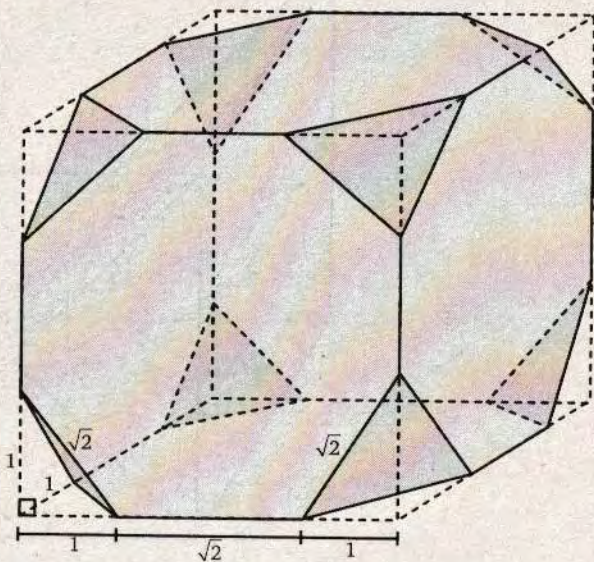
$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = \left(3\frac{1}{2}\right)(x)$$

$$\frac{L}{2} 3\sqrt{2} = 3x$$

$$\therefore \frac{L\sqrt{2}}{2} = x$$

Rpta.: B

Resolución 80: Piden el volumen (V_x) del poliedro; el cual se obtiene a partir de un cubo, tal como se muestra en el siguiente gráfico.



RECUERDA

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} S_{\text{Base}} \times h$$

$$\Rightarrow V_x = V_{\text{Cubo}} - 8[V_{\text{Pirámide}}]$$

$$V_x = (2 + \sqrt{2})^3 - 8 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1 \times 1}{2} \right) \times 1 \right]$$

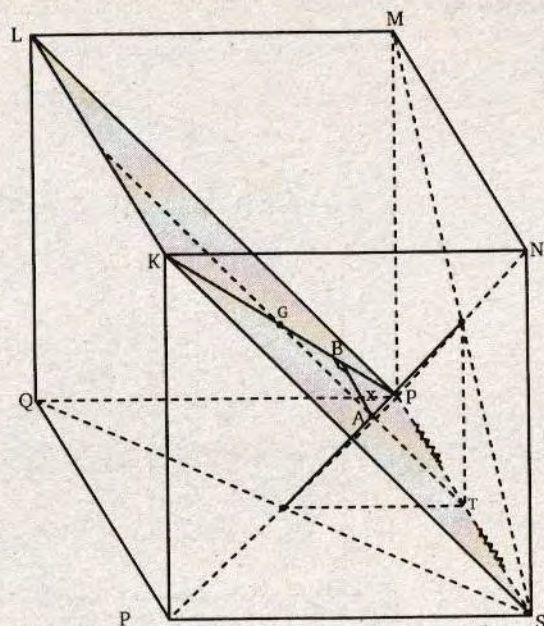
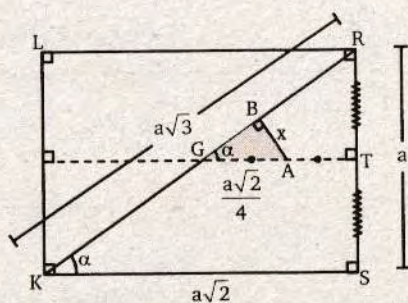
$$V_x = (8 + 2\sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 12) - 8 \left[\frac{1}{6} \right]$$

$$V_x = 20 + 14\sqrt{2} - \frac{4}{3}$$

$$\therefore V_x = 14\sqrt{2} + \frac{56}{3}$$

Rpta.: D

Resolución 81:

Piden: $AB = x$ 

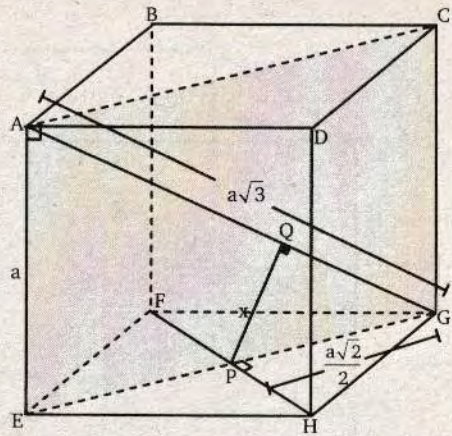
$$\triangle GBA \sim \triangle KSR$$

$$\frac{x}{a\sqrt{3}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

Rpta.: D

Resolución 83:



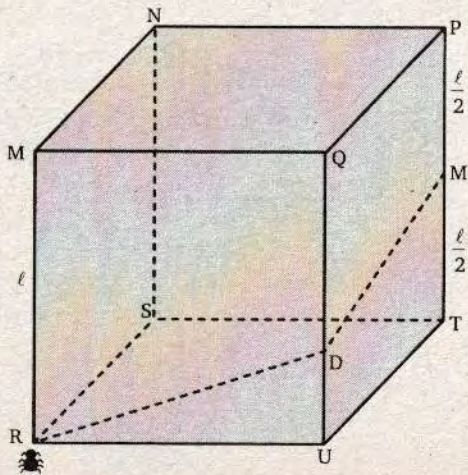
Piden $PQ = x$

$$\triangle PQG \sim \triangle AEG : \quad \frac{x}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

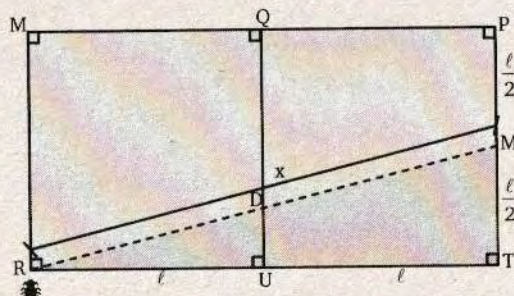
Rpta.: B

Resolución 84:



Piden : $(RD + DM)_{\text{mínimo}} = x$

Para ello desarrollamos las caras MQUR y QPTU:



$\Rightarrow$ Para que la araña realice el menor recorrido; R, D y P deben ser colineales.

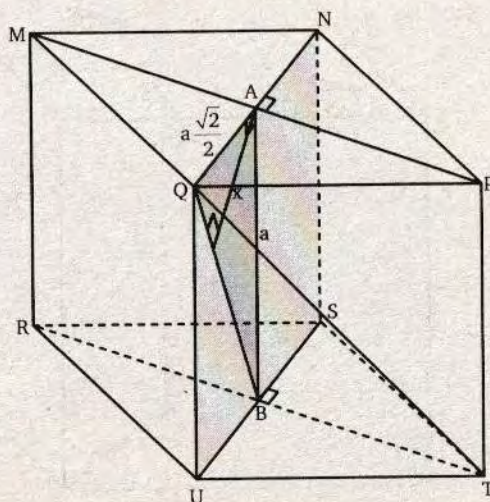
$\triangle RMT$ (Teorema de Pitágoras):

$$x^2 = (2\ell)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{17}\ell}{2}$$

Rpta.: B

Resolución 85:

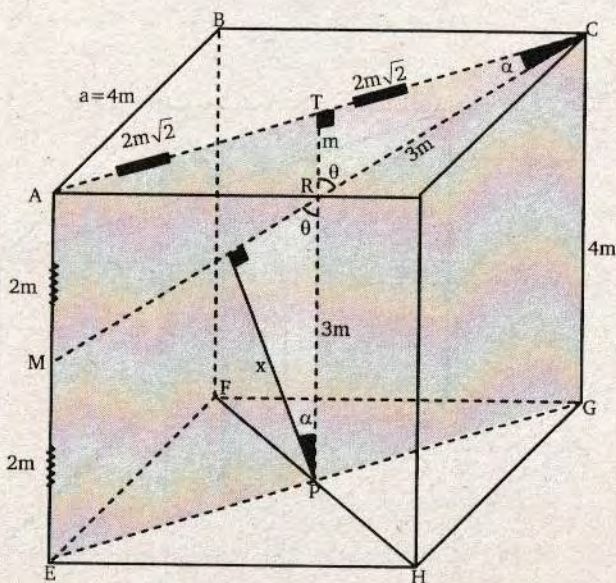


$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\left(a \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{3}{a^2}$$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Resolución 86:

Piden $PQ = x$

$$\triangle EMCG: \quad PR = \frac{2m + 4m}{2}$$

$$PR = 3m$$

$$\Rightarrow RT = m$$

$\triangle RTC$ (Teorema de Pitágoras):

$$(RC)^2 = (2m\sqrt{2})^2 + m^2$$

$$\Rightarrow RC = 3m$$

$\triangle PRQ \cong \triangle CRT$ (A - L - A)

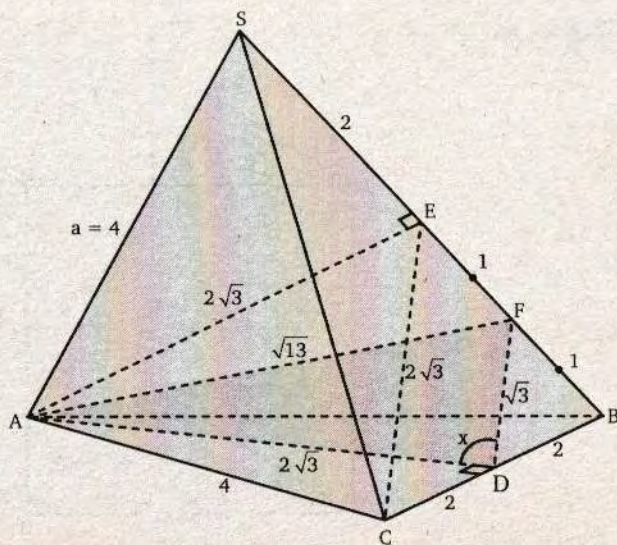
$$\Rightarrow x = 2m\sqrt{2}$$

$$x = 2\left(\frac{a}{4}\right)\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Rpta.: A

Resolución 87:



Piden : $m\angle (\overline{AD}; \overline{CE})$

Sin pérdida de generalidad sea la longitud de la arista del tetraedro regular:

$$a = 4$$

Trazamos $\overline{DF} \parallel \overline{CE} \Rightarrow m\angle (\overline{AD}; \overline{CE}) = m\angle (\overline{AD}; \overline{DF}) = x$

$\triangle CEB$ ($\overline{DF}$: Base media):

$$\Rightarrow DF = \frac{CE}{2} = \sqrt{3}$$

$\triangle AEF$ (Teorema de Pitágoras):

$$(AF)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow AF = \sqrt{13}$$

$\triangle AFD$ (Teorema de cosenos):

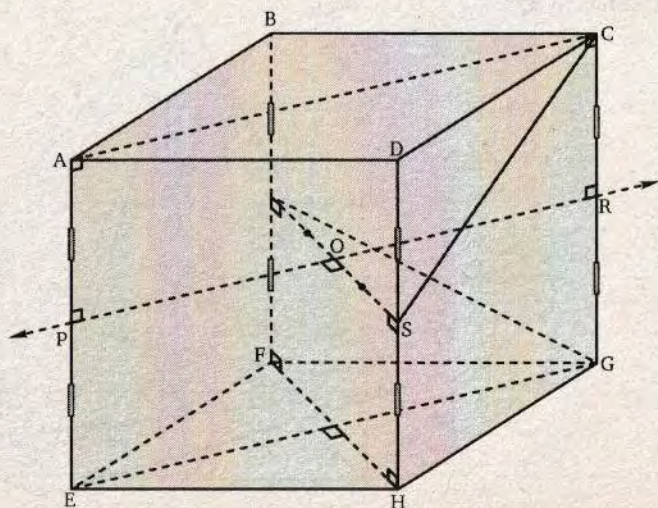
$$(\sqrt{13})^2 = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2(2\sqrt{3})(\sqrt{3})\cos x$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

Rpta.: A

Resolución 88:



Piden el simétrico de $\overline{CS}$ respecto a $\overline{PR}$

ACRP : rectángulo $\Rightarrow \overline{CG} \perp \overline{PR}$

$$CR = RG$$

$\Rightarrow G$ es el simétrico de C respecto de $\overline{PR}$ (I)

Además: $\overline{SQ} // \overline{HF} \wedge \overline{PR} // \overline{EG} \wedge \overline{HF} \perp \overline{EG}$

$$\Rightarrow \overline{SQ} \perp \overline{PR}$$

$$SO = OQ$$

$\Rightarrow Q$ es el simétrico de S respecto de $\overline{PR}$ (II)

De (I) y (II) tenemos:

$\therefore \overline{GQ}$ es simétrico de $\overline{CS}$

Rpta.: D

Resolución 89:

Piden : $n = ?$

Datos : $\# \Delta = N$; $V = 8$

$$\# \Delta = 4n$$

$$\rightarrow A = \frac{4n + 12n}{2} = \frac{16n}{2} = 8n$$

Por teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

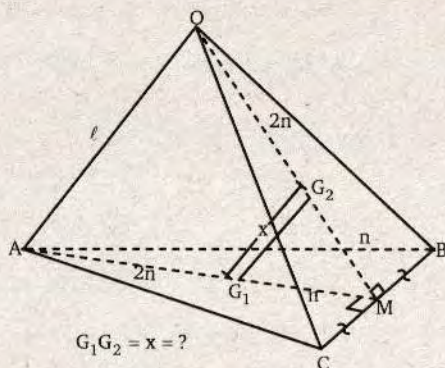
$$\rightarrow 5n + 8 = 8n + 2$$

$$6n = 3n$$

$$\therefore n = 2$$

Rpta.: A

Resolución 90:



Piden : $G_1G_2 = x = ?$

Dato : arista = ℓ

Trazamos las laturas $OM \perp AM$ en sus caras respectivas $OBC \perp ACB$

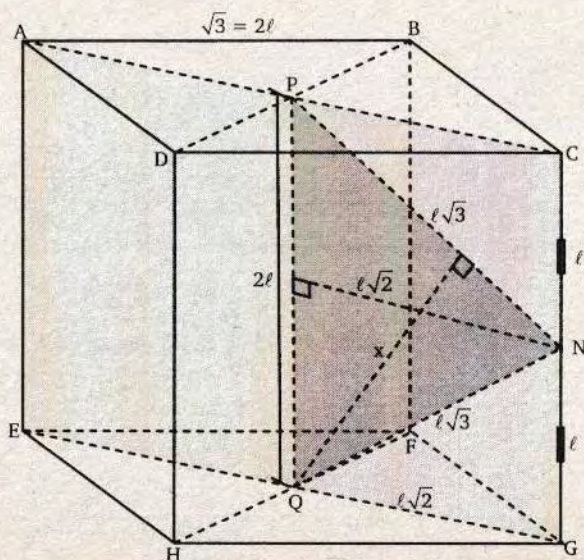
Se observa : $\triangle G_1G_2M \sim \triangle AOM$

$$\frac{x}{\ell} = \frac{n}{3n}$$

$$\therefore x = \frac{\ell}{3}$$

Rpta.: B

Resolución 91:



Piden: x

Dato $AB = \sqrt{3}$

Sea : $AB = \sqrt{3} = 2\ell$

Calculamos el área de la región triangular PNQ

$$S = \frac{\cancel{1} \sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{2\cancel{1} \cdot \ell \sqrt{2}}{2}$$

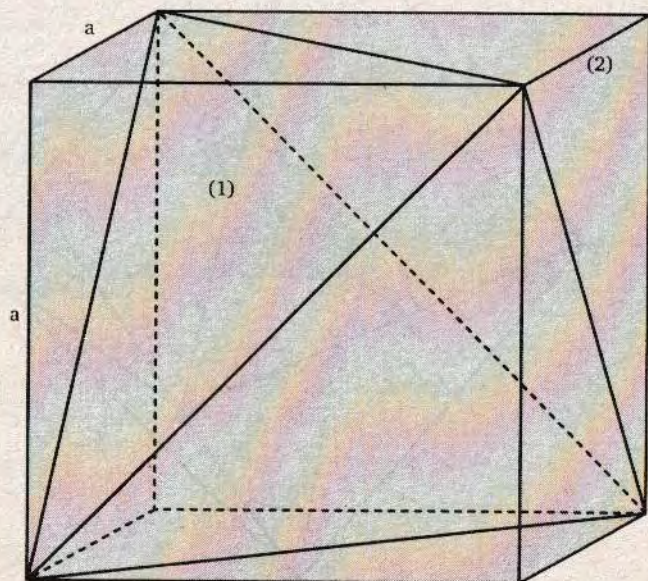
$$\Rightarrow x = \frac{2\ell \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

Rpta.: A

Resolución 92:



Piden:

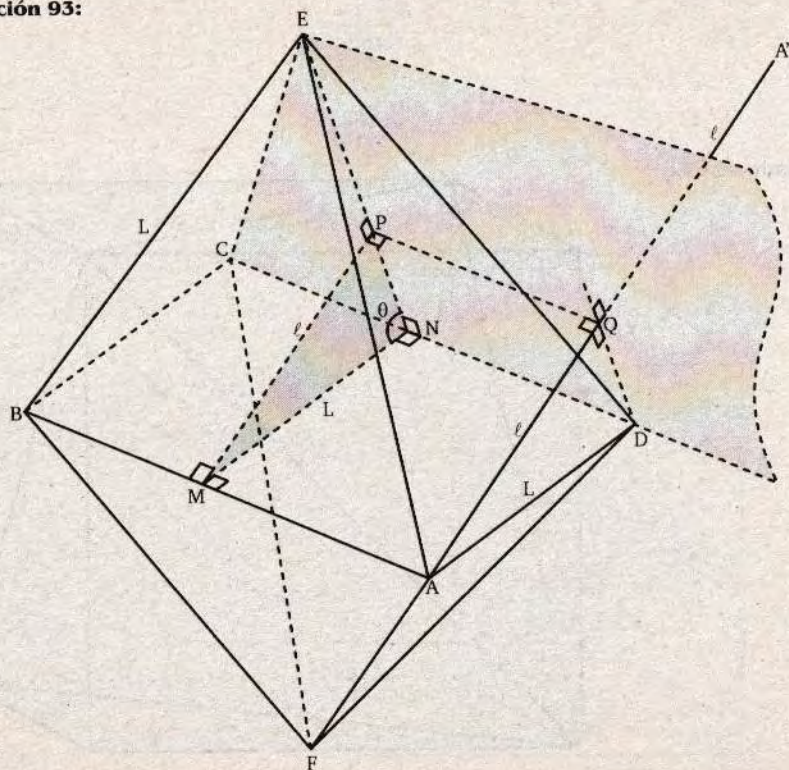
$$\frac{S_{\text{Total(Tetraedro)}}}{S_{\text{Total(cubo)}}} = \gamma$$

$$\begin{cases} S_{\text{total(tetraedro)}} = (a\sqrt{2})^2 \sqrt{3} = 2a^2 \sqrt{3} \\ S_{\text{total(cubo)}} = 6a^2 \end{cases}$$

Luego:

$$\gamma = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{6a^2}$$

$$\therefore \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Rpta.: A**Resolución 93:**

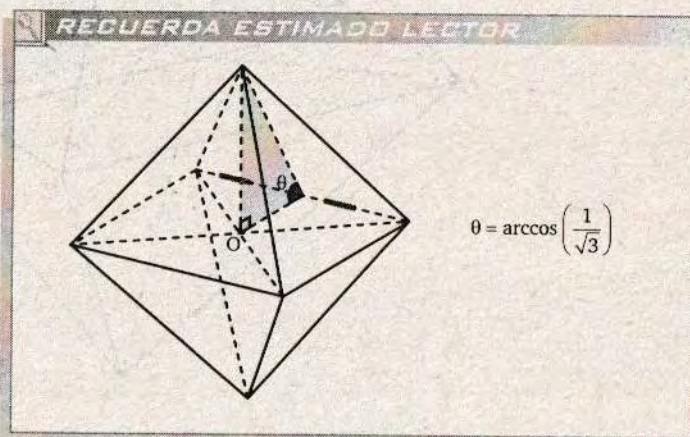
Piden: $AA' = 2\ell$

$$\text{Trazamos: } \begin{cases} \overline{EN} \perp \overline{CD} \text{ (N: punto medio de } \overline{CD}) \\ \overline{MN} \parallel \overline{AD} \Rightarrow \overline{MN} \perp \overline{CD} \\ \overline{MP} \perp \overline{EN} \end{cases}$$

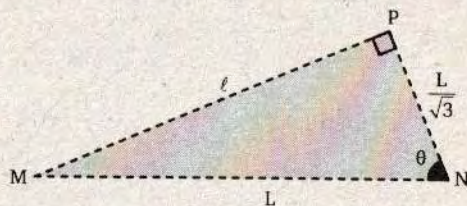
$$\Rightarrow \overline{MP} \perp \text{▮ECD}$$

□ MPQA (Rectángulo):

$$MP = AQ = \ell$$



$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



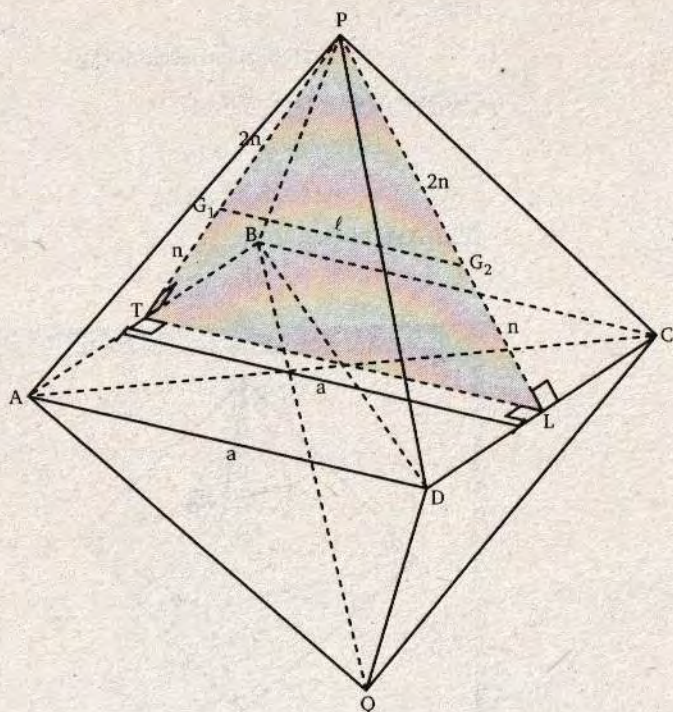
$$L^2 = \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 + \ell^2$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{L\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore AA' = \frac{2L\sqrt{6}}{3}$$

Rpta.: B

Resolución 94:



Piden :

$$S_{\text{Total}}$$

$$S_{\text{Total}} = 2a^2\sqrt{3} \quad \dots (I)$$

Se observa :

$$\Delta G_1PG_2 \sim \Delta TPL$$

$$\frac{a}{\ell} = \frac{3n}{2n}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}\ell$$

Luego en (I):

$$S_{\text{Total}} = 2\left(\frac{3\ell}{2}\right)^2\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\text{Total}} = \frac{9\ell}{2}$$

Rpta.: A

Resolución 95: Piden m

Datos : $V = 33$ y $\begin{cases} \Delta : 8 \\ \square : 9 \\ \bigcirc : m \end{cases}$

$$\Rightarrow C = 17 + m$$

Teorema de Euler:

$$C + V = A + 2$$

$$17 + m + 33 = A + 2$$

$$m + 48 = A$$

$$\Rightarrow m + 48 = \frac{3 \times 8 + 4 \times 9 + 5m}{2}$$

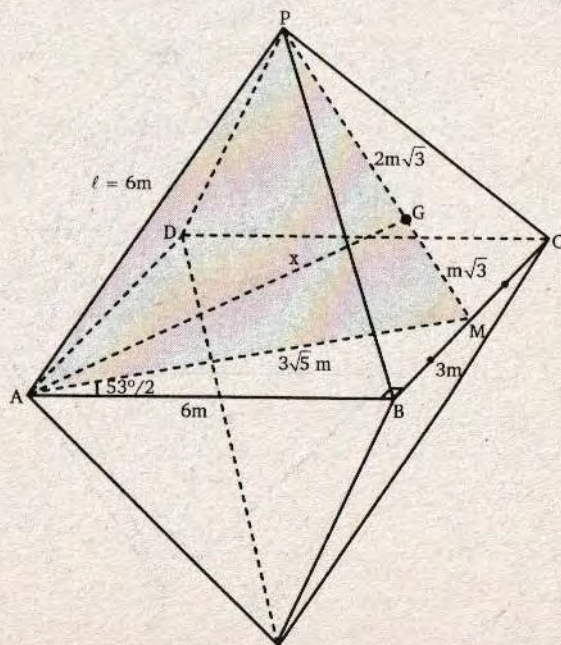
$$2m + 96 = 60 + 5m$$

$$36 = 3m$$

$$\therefore 12 = m$$

Rpta.: E

Resolución 96:



Piden $AG = x$

G es baricentro $\Rightarrow PG = 2(GM)$

$\triangle AMB$ (Notable de $\frac{53^\circ}{2}$)

$$AM = 3\sqrt{5} \text{ m}$$

$\triangle PAM$ (Teorema de Stewart)

$$(6m)^2(m\sqrt{3}) + (3\sqrt{5}m)^2(2m\sqrt{3}) = x^2(3m\sqrt{3}) + (2m\sqrt{3})(m\sqrt{3})(3m\sqrt{3})$$

$$36m^2 + 90m^2 = 3x^2 + 18m^2$$

$$36m^2 = x^2$$

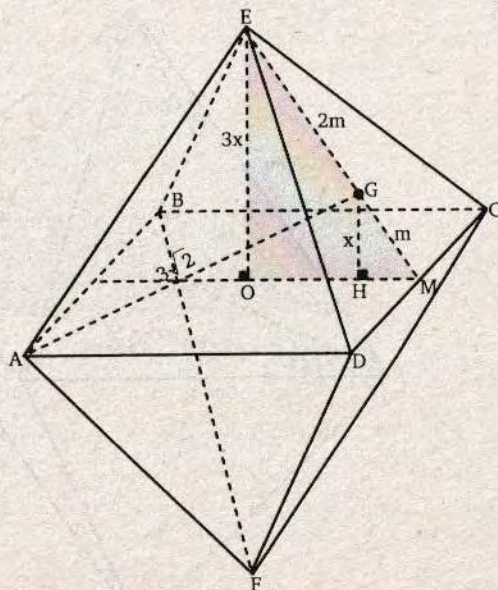
$$6m = x$$

pero $\ell = 6m$

$$\therefore x = \ell$$

Rpta.: A

Resolución 97:



Calculamos el área de la región triangular PMQ:

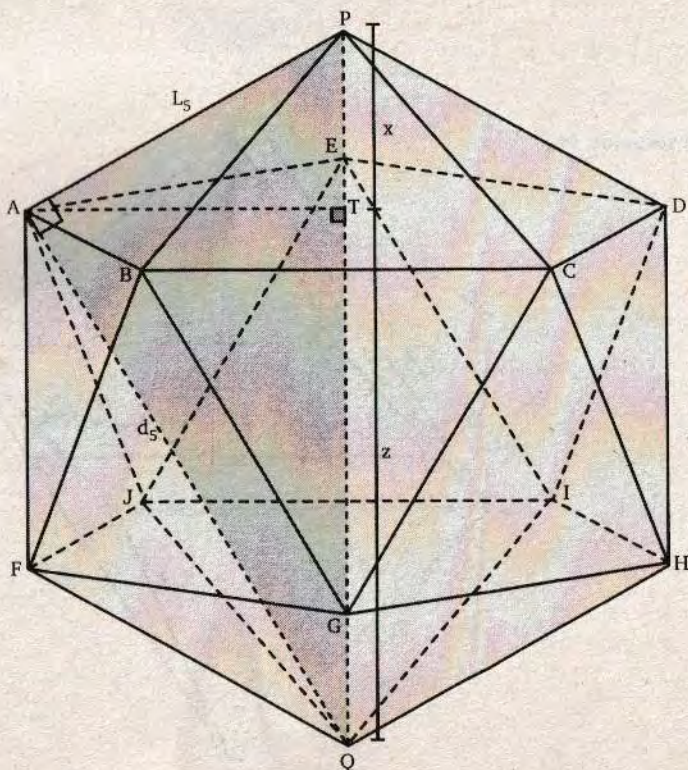
$$S_{PMQ} = \frac{(\cancel{m} \sqrt{3})x}{2} = \frac{(2\cancel{m})(m\sqrt{2})}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ m}$$

Pero $a = 2\text{m}$

$$\therefore x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Rpta.: C

Resolución 99:

$$\text{Piden: } \frac{PT}{TQ} = \frac{x}{z}$$

APHQ es un rectángulo $\Rightarrow m\angle PAQ = 90^\circ$

(ABCDE) y (ABGQJ) son pentágonos regulares congruentes de lados " L_5 ", diagonales " d_5 " y circunradios " R ".

RECUERDA ESTIMADO LECTOR

En todo pentágono regular, el lado es sección áurea de su diagonal, esto es:

$$L_5 = d_5 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

$\triangle PAQ$ (Relación métrica):

$$\begin{cases} (L_5)^2 = (PQ)(x) \\ (d_5)^2 = (PQ)(z) \end{cases}$$

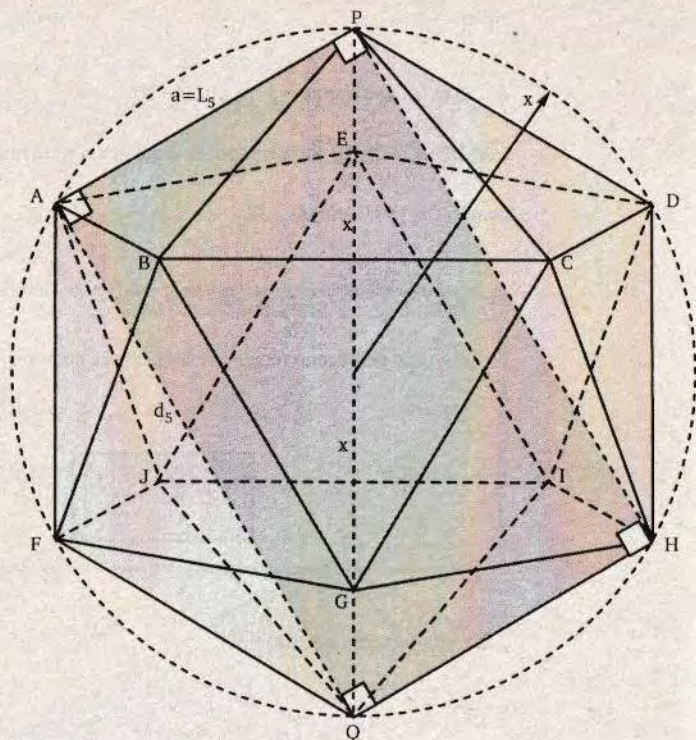
$$\Rightarrow \frac{x}{z} = \left(\frac{L_5}{d_5} \right)^2$$

$$\frac{x}{z} = \left(\frac{d_5 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)}{d_5} \right)^2$$

$$\therefore \frac{x}{z} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Rpta.: C

Resolución 100:



Piden : $OP = OQ = x$

De acuerdo a las observaciones del problema anterior (99).

APHQ es un rectángulo de lados L_5 y d_5 (el cual se conoce como rectángulo áureo); y bastará con calcular la mitad de su diagonal.

△ APQ (Teorema de Pitágoras):

$$(2x)^2 = (L_5)^2 + (d_5)^2$$

$$4x^2 = (L_5)^2 + \left[L_5 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) \right]^2$$

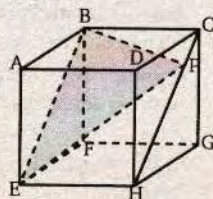
$$\therefore x = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} a$$

Rpta.: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Se tiene un hexaedro cuyas caras triangulares son regulares. ¿Qué poliedro que se forma al unir los puntos medios de todas sus aristas?
 - Nonaedro
 - Poliedro de 10 caras.
 - Poliedro de 13 caras.
 - Poliedro de 14 caras.
 - Pentadecaedro.
- En un poliedro convexo, el número de caras, más el número de vértices y más el número de aristas es 28. Si las medidas de los ángulos de todas las caras suman 1800. Halle el número de caras.
 - 7
 - 8
 - 10
 - 12
 - 14
- Al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular, se determina un:
 - Tetraedro regular.
 - Hexaedro regular.
 - Octaedro regular
 - Dodecaedro regular.
 - Una región cuadrada.
- Calcule el número de caras de un poliedro convexo, sabiendo que la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es 10800 y la suma entre el número de caras, de vértices y de aristas es 90.
 - 10
 - 12
 - 14
 - 16
 - 18
- La suma de las medidas de los ángulos internos de las caras de un poliedro convexo de V vértices, C caras y A aristas es igual a:
 - $360(A - C)$
 - $360(A - 2)$
 - $360(V - C)$
 - $360(C - A)$
 - $360(A - V)$
- Un poliedro convexo esta formado por 2 caras hexagonales, 4 caras cuadrangulares y 10 caras triangulares, Si A es el número de aristas y V el número de vértices, calcule $\frac{A}{V}$
 - $\frac{32}{9}$
 - $\frac{26}{5}$
 - $\frac{29}{15}$
 - $\frac{33}{12}$
 - $\frac{35}{9}$
- Dado un triángulo rectángulo isósceles ABC , $\overline{AE}$ perpendicular al plano del triángulo. Si $2AE = BC$, hallar la medida del ángulo con que se cruzan $\overline{EB}$ y $\overline{AC}$.
 - 45°
 - 60°
 - 75°
 - 80°
 - 90°
- En un hexaedro regular cuya arista mide a unidades, calcule la distancia entre dos diagonales de dos caras adyacentes, sabiendo que éstas diagonales no son coplanares.
 - $\frac{a}{\sqrt{3}}$
 - $a\sqrt{2}$
 - $\frac{2a}{\sqrt{5}}$
 - $\frac{2a}{\sqrt{3}}$
 - $\frac{2a}{3}$

9. Dado un hexaedro regular ABCD - $A_1B_1C_1D_1$, halle la medida del ángulo formado por los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{C_1O}$, O es punto medio de A_1C_1
- A) 60 B) 70 C) 72
D) 80 E) 90
10. En un tetraedro O - ABC trirrectángulo en O. Las áreas de sus caras catetos SAOB = 30 m^2 , SBOC = 40 m^2 y SAOC = 50 m^2 . Calcule el área de la cara hipotenusa (cara ABC).
- A) $50\sqrt{2} \text{ m}^2$ B) $50\sqrt{3} \text{ m}^2$
C) $50\sqrt{6} \text{ m}^2$
D) $50\sqrt{7} \text{ m}^2$ E) $50\sqrt{11} \text{ m}^2$
11. La arista de un octaedro regular mide 5. Calcular el área total de dicho poliedro.
- A) $25\sqrt{2}$ B) $25\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $50\sqrt{3}$ E) 50
12. Calcule el área total de un cubo, si la diagonal de sus caras mide $5\sqrt{2}$.
- A) 50 B) 125 C) 300
D) 150 E) 100
13. Si la diagonal de un octaedro regular mide $3\sqrt{2}$, calcular su volumen.
- A) $4,5\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $9\sqrt{2}$ E) 12
14. El desarrollo de la área lateral de un cubo es un rectángulo de diagonal igual a $\sqrt{17}$. Hallar el volumen del cubo.
- A) 1 B) $\frac{1}{3}$ C) 2
D) $\sqrt{3}$ E) 4
15. La arista de un tetraedro regular mide 6. Calcular su volumen.
- A) $12\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{2}$ C) 36
D) 20 E) $18\sqrt{3}$
16. Las aristas de un cubo suman S. Calcular su volumen.
- A) $\frac{S^3}{1768}$ B) $\frac{S^3}{1758}$ C) $\frac{S^3}{1738}$
D) $\frac{S^3}{1728}$ E) $\frac{S^3}{1528}$
17. En un cubo ABCD - EFGH, el área de la región EBCH es $16\sqrt{2} \text{ u}^2$. Calcule el volumen del cubo.
- A) 46 u^3 B) 32 u^3 C) 64 u^3
D) 48 u^3 E) 72 u^3
18. En la figura: ABCD - EFGH es un hexaedro regular, P es punto en $\overline{HC}$ y el área de la región triangular EBP es $8\sqrt{2} \text{ m}^2$. Calcular el volumen del hexaedro regular.



- A) 63
B) 66
C) 64
D) 56
E) 54

19. Se tiene un hexaedro regular ABCD - EFGH. Si el segmento que une los puntos medios de EF y DH mide $2\sqrt{6}$, calcule el volumen del hexaedro.
- A) 36 B) 82 C) 72
D) 64 E) 46
20. En el cubo ABCD - EFGH, la distancia entre el $\overline{FH}$ y el $\overline{CG}$ es $\sqrt{2}$. Calcular el área de la superficie.
- A) 36 B) 82 C) 72
D) 64 E) 46
21. ABCDEF es un poliedro de 6 caras y en donde sus aristas cumplen las siguientes condiciones: $FE = FB$, $\overline{FA} \perp \overline{AB}$, $\overline{FA} \perp \overline{AE}$, $FD = FC$, $\overline{BA} \perp \overline{EA}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$, $DE \perp AE$, calcule la $m\angle BED$.
- A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 72
22. ¿Cuántos planos de simetría tiene un tetraedro regular?
- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6
23. Hallar el área de la sección originada por un plano de simetría que pasa por una de las aristas del tetraedro regular de arista a.
- A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{16}$ B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$ C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ E) $a^2\sqrt{2}$
24. Halle el área de la región limitada por la sección hecha en un tetraedro regular de 10 cm de arista por un plano de simetría que pasa por una de sus aristas (en cm^2).
- A) 15 B) $15\sqrt{2}$ C) 20
D) 25 E) $25\sqrt{2}$
25. En un tetraedro regular P - ABC, se traza la altura PH, en la cual se ubica el punto Q tal que $QB = QP$, $AB = 12$. Halle: $QC - QH$
- A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$
26. ABCD es un tetraedro regular M es el punto medio de la arista $\overline{DB}$ y O es el centro de la cara ABC, si $OA = 4$ m, entonces la longitud de $\overline{OM}$ (en m) es:
- A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$
27. Cuáles son verdaderos o falsos.
- I. El tetraedro regular tiene 6 planos de simetría y 3 ejes de simetría.
II. El hexaedro regular tiene 9 planos de simetría, 9 ejes de simetría y 1 centro de simetría.
III. El octaedro regular tiene 9 planos de simetría, 9 ejes de simetría y 1 centro de simetría.
- A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFF
28. En el cubo ABCD - EFGH. ¿Qué arista es el simétrico de la arista AE con respecto al plano BDHF?
- A) $\overline{BF}$ B) $\overline{DH}$ C) $\overline{CG}$
D) $\overline{EF}$ E) $\overline{EG}$

29. Si la arista de un tetraedro regular es ℓ , entonces la distancia entre dos de sus aristas opuestas es:

A) $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\ell\sqrt{2}}{4}$ C) $2\ell\sqrt{2}$
D) $\ell\sqrt{2}$ E) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

30. Dado un cubo ABCD - EFGH. Si P y Q son puntos medios de los lados AB y CD, indique el polígono que se determina cuando es intersectado por el plano (P, Q, R).

A) Triangular B) Cuadrangular
C) Pentagonal
D) Hexagonal E) Heptagonal

31. Si ABCD - EFGH es un cubo de arista ℓ , entonces la longitud de menor camino para ir de A hasta G recorriendo la superficie cúbica es:

A) $\frac{5\ell\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{3\ell\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{3\ell\sqrt{5}}{2}$
D) $\ell\sqrt{5}$ E) $2\ell\sqrt{5}$

32. Se tienen 27 cubitos de arista igual a $1u.$, con ellos se forma un cubo mayor que es pintado exteriormente en forma total. Al desarmar el cubo. Halle el área que ha quedado sin pintar en todos los cubitos.

A) 108 B) 110 C) 96
D) 115 E) 105

33. En un dodecaedro regular de caras adyacentes ABCDN y ABEFG. Halle la medida del ángulo que determinan las rectas AD y GF

A) 30 B) 45 C) 60
D) 90 E) 120

34. Calcular el volumen de un cubo si se sabe que el triángulo formado por prolongar las rectas que unen los puntos medios de sus aristas consecutivas (de tal manera que 3 puntos no pertenecen a la misma cara) tienen un área de $72\sqrt{3} \text{ m}^2$.

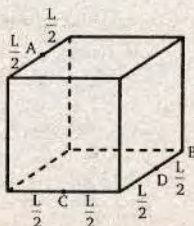
A) 512 B) 343 C) 216
D) 729 E) 100

35. Dado un tetraedro regular ABCD; M es punto medio de BC y Q es punto medio de AM tal que: $\frac{AQ}{QM} = \frac{1}{3}$. Hallar el ángulo que forman $\overline{BC}$ y $\overline{DQ}$.

A) $22^\circ 30'$ B) 20° C) 39°
D) 45° E) 90°

36. En la figura se muestra un cubo cuya arista mide L unidades. Calcular el ángulo con que se cruzan las rectas AB y CD.

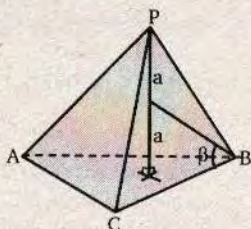
A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 72°



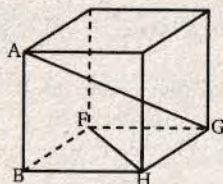
37. En un hexaedro regular ABCD - EFGH, se ubican los puntos medios M y N de las aristas AD y FG respectivamente. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{MN}$ y $\overline{EF}$.
- A) 45 B) 60 C) 30
D) 75 E) 90
38. En un hexaedro regular ABCD - EFGH, en la arista BF se ubica el punto T. Si $AB = 10$ m, $TB = 8$ m. Halle la longitud del camino más corto partiendo de A hasta llegar al punto T recorriendo 3 caras verticales de un poliedro (en m).
- A) 31 B) $2\sqrt{241}$ C) $10\sqrt{10}$
D) $11\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{257}$
39. Al unir los puntos medios de las aristas de un octaedro regular se determina un poliedro de caras.
- A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 16
40. Un cubo se proyecta sobre un plano perpendicular a una de sus diagonales. Calcular el área proyectada sabiendo que la arista del cubo es de 6 m.
- A) $30\sqrt{3} \text{ m}^2$ B) $32\sqrt{3} \text{ m}^2$
C) $34\sqrt{3} \text{ m}^2$
D) $36\sqrt{3} \text{ m}^2$ E) $38\sqrt{3} \text{ m}^2$
41. Sea ABCD - MNPQ un hexaedro regular de centro O. Si T y R son puntos medios de MQ y PC respectivamente, calcular la $m\angle ROT$.
- A) 90° B) 30° C) 120°
D) 135° E) 45°
42. En el octaedro regular E - ABCD - F, M es punto medio de EC. Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{AM}$ y $\overline{DE}$.
- A) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$
C) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$
D) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$ E) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{10}$
43. Se tiene un cubo ABCD - EFGH y un punto interior "P". Si:
 $(PA)^2 + (PC)^2 - (PB)^2 = a^2$, hallar PD.
- A) a B) 2a C) $\frac{a}{2}$
D) $\frac{3a}{2}$ E) $\frac{3a^2}{4}$
44. Considerando como vértices los puntos donde se cortan las dos diagonales de cada cara de un hexaedro regular, se obtiene un octaedro, también regular. Si las aristas del hexaedro mide "a" cm, las caras del octaedro medirán:
- A) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3} \text{ cm}^2$ B) $\frac{a^2}{4} \text{ cm}^2$
C) $\frac{a^2}{8} \text{ cm}^2$
D) $\frac{3a^2}{8} \text{ cm}^2$ E) $\frac{3a^2}{4} \text{ cm}^2$

45. Del gráfico, calcule β si se sabe que $P-ABC$ es un tetraedro regular de arista 6.

- A) 30°
B) 45°
C) 53°
D) 60°
E) 37°



46. En la figura, $\overline{AG}$ es la diagonal del cubo y $\overline{HF}$ es la diagonal de la base. Si la distancia entre las rectas que contienen a $\overline{HF}$ y $\overline{AG}$ es $\sqrt{6}$ cm, halle el área total del cubo.



- A) 216 cm^2 B) 144 cm^2 C) 96 cm^2
D) 108 cm^2 E) 128 cm^2
47. Dado el hexaedro regular $ABCD - EFGH$ de aristas laterales $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$. Los puntos M y N son puntos medios de las aristas $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$. Hallar la medida del ángulo diedro entre el plano MNB y el plano $EFGH$.

- A) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
C) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
D) $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$ E) $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$

48. Se tiene un poliedro convexo formado por 10 regiones cuadrangulares. Calcular el número de aristas de dicho poliedro.

- A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

49. En un octaedro regular $P-ABCD-Q$, M y N , son centros de las caras PCD y ABQ , respectivamente. Si la distancia entre $\overline{DN}$ y $\overline{MR}$ (R es punto medio de

$$PA) = \left(\frac{3\sqrt{22}}{11}\right)u.$$

Calcular el volumen del octaedro.

- A) $9\sqrt{2}u^3$ B) $3\sqrt{6}u^3$ C) $7\sqrt{19}u^3$
D) $\sqrt{17}u^3$ E) $5\sqrt{6}u^3$

50. "O" es el centro de un hexaedro regular $ABCD - EFGH$; M y N son los puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{CG}$ respectivamente. Si el área de la región triangular OMN es S , calcular el área total del hexaedro regular.

- A) $8S\sqrt{3}$ B) $16S\sqrt{3}$ C) $24S\sqrt{3}$
D) $12S\sqrt{2}$ E) $9S\sqrt{6}$

51. Dado el cubo $ABCD - EFGH$ de arista "a", M y N son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$. Siendo "O" el centro de la cara $CDHG$, hallar la distancia del punto de intersección entre $\overline{OF}$ y el plano que contiene a $MBNH$, a la cara $EFGH$.

- A) $\frac{2a}{5}$ B) $\frac{3a}{5}$ C) $\frac{a}{4}$
D) $\frac{3a}{8}$ E) $\frac{a}{5}$

52. Un poliedro que tiene 12 vértices y 21 aristas está formado por "2p" triángulos, "c" cuadriláteros y "p" pentágonos no convexos. Entonces, "p" y "c" son, respectivamente:
- A) 1 y 8 B) 3 y 2 C) 2 y 5
D) 3 y 4 E) 4 y 1
53. En un tetraedro regular ABCD, M y N son puntos medios de AD y BC, respectivamente. Si la distancia entre MN y AC es $3\sqrt{2}u$, calcular el área de la superficie del poliedro conjugado del tetraedro inscrito en él.
- A) $4\sqrt{3}u^2$ B) $2\sqrt{3}u^2$ C) $16\sqrt{3}u^2$
D) $6\sqrt{3}u^2$ E) $5\sqrt{3}u^2$
54. Las aristas de un cubo miden 15 cm cada una. Si una mosca puede desplazarse sólo sobre las aristas y parte de uno de los vértices, el máximo recorrido que puede hacer para volver a su punto de partida, sin pasar dos veces por la misma arista es:
- A) 1,80 m B) 0,60 m C) 0,75 m
D) 0,90 m E) 1,20 m
55. ¿Cuántas diagonales tiene aquel poliedro convexo que está limitado por 6 regiones cuadrangulares y 8 regiones triangulares?
- A) 38 B) 36 C) 34
D) 32 E) 30
56. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide L unidades (u). Calcular el área de la superficie total del octaedro.
- A) $3L^2\sqrt{3}u^2$ B) $4L^2\sqrt{3}u^2$
C) $2L^2\sqrt{3}u^2$
D) $\frac{4L^2\sqrt{3}}{3}u^2$ E) $\frac{5L^2\sqrt{3}}{2}u^2$
57. Calcular el número de aristas de aquel poliedro, cuyo número de caras y el número de aristas están en la relación de 2 a 3. Además, la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es igual a 3600°
- A) 20 B) 24 C) 28
D) 30 E) 32
58. En un cubo de 2m de arista, se unen 3 vértices de modo que se forma un triángulo equilátero. Determine el área de dicho triángulo.
- A) $4\sqrt{3}m^3$ B) $2\sqrt{3}m^3$ C) $3\sqrt{2}m^3$
D) $2\sqrt{2}m^3$ E) $6\sqrt{3}m^3$
59. Una de las caras de un tetraedro regular tiene sus vértices en una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y + 4 = 0$. Determine el volumen del tetraedro.
- A) $\frac{\sqrt{6}}{4}u^3$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}u^3$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{12}u^3$
D) $\frac{\sqrt{2}}{12}u^3$ E) $\frac{\sqrt{6}}{12}u^3$

60. En un tetraedro regular, si el segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas es $\overline{MN}$. El lado del tetraedro, medirá:
- A) $MN\sqrt{3}$ B) $MN\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $MN\sqrt{2}$
 D) $MN\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2}{3}MN$
61. En un tetraedro $V - ABC$, M y N son puntos medios de $\overline{VB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Además: $m\angle VAB = 90^\circ$, $m\angle VCB = 90^\circ$, $VB = 100u$ y $AC = 80u$, entonces la longitud (en u) de $\overline{MN}$ es:
- A) 30 B) 35 C) 40
 D) 45 E) 50
62. En el tetraedro regular $S - ABC$, se ubican los puntos medios O, M, N, P, Q y R de las aristas $\overline{BD}, \overline{AD}, \overline{CD}, \overline{BC}, \overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si el área total del octaedro $OMNPQR$ es $8\sqrt{3}u^2$, entonces la suma de las longitudes (en u) de las aristas del tetraedro $ABCD$ es:
- A) 18 B) 24 C) 30
 D) $18\sqrt{3}$ E) $15\sqrt{3}$
63. En un tetraedro regular $S - ABC$, la medida del ángulo entre la arista $\overline{AB}$ y el plano SAC es:
- A) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ B) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
 C) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$
 D) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$ E) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{8}\right)$
64. En un tetraedro regular $ABCD$, P y Q son centros de las caras BCD y ACD . Entonces, la medida del ángulo entre $\overline{BC}$ y $\overline{PQ}$ es:
- A) 90° B) 60° C) 45°
 D) 37° E) 30°
65. En un octaedro regular $S - ABCD - R$. En la arista $\overline{SC}$ se ubica un punto P tal que $SP < PC$. ¿Qué tipo de región determina en el octaedro el plano secante PDR ?
- A) Triangular B) Cuadrangular
 C) Pentagonal
 D) Hexagonal E) Octagonal
66. $V - ABC$ es un tetraedro regular, M y N puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{VB}$ respectivamente. Entonces, la medida del ángulo que determinan las rectas VM y AN es:
- A) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ B) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$
 C) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$
 D) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ E) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$
67. En un hexaedro regular $ABCD - EFGH$ se ubica un punto P en su interior. Si:
- $$(PE)^2 + (PH)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 = 6u^2,$$
- entonces:
- $$(PA)^2 + (PD)^2 + (PF)^2 + (PG)^2 \text{ (en } u^2\text{)}$$
- es:
- A) 3 B) 2 C) 4
 D) 6 E) 12

68. En un tetraedro regular, la arista mide ℓ unidades. Entonces, el área de la superficie del poliedro que tiene por vértices los puntos medios de los lados de cada cara es:

A) $\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{8}$ B) $\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{2}$
D) $\ell^2 \sqrt{3}$ E) $2\ell^2 \sqrt{3}$

69. En un hexaedro regular ABCD - EFGH, la arista mide ℓ unidades. M es punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{BC}$. Entonces el área (en u^2) de la sección determinada en el hexaedro por un plano que pasa por los puntos M, N y H es:

A) $\frac{7\sqrt{17} \ell^2}{9}$ B) $\frac{7\sqrt{17} \ell^2}{24}$
C) $\frac{7\sqrt{17} \ell^2}{18}$
D) $\frac{7\sqrt{17} \ell^2}{48}$ E) $\frac{7\sqrt{17} \ell^2}{36}$

70. En el rectángulo ABCD, se ubica el punto E en $\overline{AC}$ tal que $EC = 3AE$. Los puntos M y N, son puntos medios de AD y BC, y $\overline{PE}$ es perpendicular al plano ADC. Si $2PE = 2DC = AC$, entonces la medida del ángulo diedro P - NM - A es:

A) $\tan^{-1} \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \right)$ B) $\tan^{-1} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)$
C) $\tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$
D) $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ E) $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$

71. En un hexaedro regular: ABCD - $A_1B_1C_1D_1$ se han trazado el plano secante BDC₁ y la diagonal $\overline{CD_1}$ de la cara CC_1D_1D . Entonces la medida del ángulo entre la diagonal $\overline{CD_1}$ y el plano secante es:

A) $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$ B) $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)$
C) $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{7}}{3} \right)$
D) $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{5} \right)$ E) $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{5}}{8} \right)$

72. En el hexaedro ABCD - $A_1B_1C_1D_1$, se ha trazado el plano secante PQC₁B₁, siendo P y Q los puntos medios de las aristas AA₁ y DD₁, respectivamente. Entonces, la medida del ángulo entre la recta CQ y el plano secante es:

A) $\sin^{-1} (4/5)$ B) $\sin^{-1} (3/5)$
C) $\sin^{-1} (5/6)$
D) $\sin^{-1} (7/8)$ E) $\sin^{-1} (2/5)$

73. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. El teorema de Euler se cumple para todos los poliedros.
II. Si el número de vértices de un poliedro es V, entonces la suma de las medidas de los ángulos de sus caras es $360(V-4)$.
III. Existen algunos poliedros no convexos, donde se verifica el teorema de Euler.

A) VVV B) FFV C) FFF
D) VFV E) VVF

74. En un tetraedro regular ABCD, de arista ℓ . Por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se traza un plano secante, paralelo a $\overline{BD}$. Entonces, el área de la sección determinada es:

A) $2\ell^2$ B) $\frac{\ell^2}{6}$ C) $\frac{\ell^2}{4}$
D) $3\ell^2$ E) $\frac{\ell^2\sqrt{2}}{2}$

75. Dado un octaedro regular y un icosaedro regular, tal que la longitud de la arista del primero es el triple de la longitud de la arista del segundo. Entonces, la relación entre las áreas del octaedro regular y el icosaedro regular.

A) $\frac{15}{7}$ B) $\frac{20}{3}$ C) $\frac{18}{5}$
D) $\frac{10}{7}$ E) $\frac{12}{5}$

76. En un hexaedro regular, la arista mide ℓ unidades. Entonces, el área total (en u^2) del poliedro cuyos vértices son los centros de las caras del hexaedro es:

A) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$ C) $\ell^2\sqrt{3}$
D) $2\ell^2\sqrt{3}$ E) $4\ell^2\sqrt{3}$

77. En el hexaedro regular ABCD-EFGH, $AB = 4\sqrt{3}$ u. Se ubica M en $\overline{BC}$ tal que $BM = 2\sqrt{3}$ u. Entonces la distancia (en u) $\overline{EM}$ y $\overline{BF}$ es:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{4}{5}\sqrt{15}$

78. Un triángulo MNC y una semicircunferencia de diámetro $\overline{MN}$, se encuentran en planos perpendiculares. En el arco $\widehat{MN}$, se ubican los puntos A y B tal que $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$. Si $m\widehat{AB} = 60^\circ$ y $\sqrt{5} MN = 4MC = 4NC$, entonces la medida del ángulo diedro formado por la región triangular ABC y el plano de la semicircunferencia es:

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

79. Un poliedro convexo tiene 5 caras, entonces el número de aristas que puede tener es:

A) 4 ó 5 B) 5 ó 6 C) 6 ó 7
D) 8 ó 9 E) 9 ó 10

80. Un poliedro convexo tiene 5 caras. Entonces, el número de vértices es:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 5 ó 6 E) 6 ó 7

81. En un cubo ABCD-EFGH de arista a, hallar la distancia entre las rectas L_1 y L_2 que pasan por los puntos B, G; y M, N son los puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$ respectivamente.

A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{a}{2}$
D) $\frac{a}{4}$ E) $\frac{a}{3}$

82. Se tienen el tetraedro O-ABC trirectángulo en O tal que $OA = OB = OC$. Calcule el coseno del ángulo diedro que forman las caras ABC y ABO.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

83. Dado el cubo ABCD - EFGH, se ubica el punto medio P de $\overline{EF}$. ¿Cuánto mide el ángulo diedro determinado por las regiones (APC) y (AHC)?

A) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$
 C) $\arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)$
 D) $\arccos \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)$ E) $\arccos \sqrt{3}$

84. ABCD - A'B'C'D' es un hexaedro regular de aristas laterales AA', BB', ... etc; hallar la medida del diedro formado por A'B'D y B'C'D.

A) $\arccos \left(-\frac{1}{6} \right)$ B) $\arccos \left(-\frac{1}{5} \right)$
 C) $\arccos \left(-\frac{1}{2} \right)$
 D) $\arccos \left(-\frac{1}{3} \right)$ E) $\arccos \left(-\frac{1}{4} \right)$

85. La arista de un octaedro regular mide a. Halle el área de la sección determinada al interceptar la superficie del poliedro con un plano paralelo a una cara, que pasa por el punto medio de una arista.

A) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ B) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{10}$ C) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$
 D) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{7}$ E) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{5}$

86. En un hexaedro regular ABCD (cara superior) EFGH (cara inferior). Calcular la longitud de la distancia del centro de la cara AEHD al baricentro de la región triangular determinada por los centros de las caras EFGH, CDHG y BCGF, si el área de la región EDG es $4\sqrt{3}\text{cm}^2$.

A) 2 cm B) 3 cm C) 4 cm
 D) 5 cm E) 6 cm

87. Determine la medida de menor ángulo formado por los ejes de simetría de un hexaedro regular.

A) 45° B) $\arccos \left(\frac{3}{4} \right)$
 C) 37°
 D) $\arccos \left(\frac{1}{2} \right)$ E) 30°

88. Un tetraedro regular ABCD tiene su cara BCD contenido en un plano Q, A'B'C'D es el tetraedro simétrico con respecto a un plano P perpendicular a Q, si la arista de los tetraedros miden a. Calcule AB'.

A) $a\sqrt{2}$ B) $a\sqrt{3}$ C) $\frac{3}{2}a$
 D) 2a E) $\frac{3}{4}a$

89. ABCE y EB'CA' son poliedros simétricos respecto a un plano $\mathcal{P}$ de manera que $\overline{BC} \parallel \mathcal{P}$, $\overline{AEC} \perp \mathcal{P}$, si $\overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{AA'} = 12u$, halle la distancia entre los baricentros de los triángulos ABC y A'B'C' (en u)

A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

90. Sea M el punto medio de la arista AB del tetraedro regular ABCD. Si el simétrico de M respecto a su eje de simetría que pasa por $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ es M' y la arista del tetraedro mide a. Halle BM

A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ E) a

91. En un cubo ABCD - EFGH de arista ℓ se ubican los puntos medios N y M en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, calcule la distancia de N a $\overline{HM}$.

A) $\frac{\sqrt{66}\ell}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}\ell}{2}$ C) $\frac{\ell}{6}\sqrt{17}$
D) $\frac{\ell}{4}$ E) $\ell\sqrt{2}$

92. En un tetraedro regular ABCD de 4 u de arista, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Halle la mínima distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ (en u).

A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

93. En un tetraedro regular, halle la medida del ángulo diedro obtuso determinado por dos de sus planos de simetría.

A) 120° B) 90° C) 100°
D) 60° E) 75°

94. Un tetraedro regular se proyecta sobre un plano perpendicular a una arista. Si la longitud de la arista del tetraedro es L; calcule el área de dicha proyección.

A) $\frac{L^2\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{L^2\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{L^2\sqrt{2}}{8}$
D) $\frac{L^2\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{L^2\sqrt{6}}{2}$

95. Sea el tetraedro regular O - ABC de arista a; por los vértices A, B y C se trazan paralelas a sus mismos lados formándose el triángulo MNQ que al unirse con O se forma el tetraedro O-MNQ, calcule el área total.

A) $3a^2$ B) $a^2(3 + \sqrt{3})$
C) $4a^2$ D) $a^2(4 + \sqrt{3})$ E) $a^2(5 + \sqrt{3})$

96. En el hexaedro regular ABCD - A'B'C'D' de arista ℓ , calcule la distancia del centro de la cara ADD'A' a un punto de trisección de la diagonal $\overline{BC'}$ en la cara opuesta.

A) ℓ B) $\ell\sqrt{\frac{19}{18}}$ C) $\ell\sqrt{\frac{18}{19}}$
D) $\ell\sqrt{\frac{17}{15}}$ E) $\ell\sqrt{\frac{15}{14}}$

97. En un tetraedro regular A - BCD de volumen $9u^3$, prolongamos $\overline{BC}$ y $\overline{BD}$ hasta N y Q tal que $BC = CN$ y $BD = DQ$. Luego se ubica el punto medio M de $\overline{AB}$ tal que $\overline{MN} \cap \overline{AC} = \{F\}$ y $\overline{MQ} \cap \overline{AD} = \{P\}$. Halle el volumen del sólido CFN - DPQ.

A) $10u^2$ B) $12u^2$ C) $15u^2$
D) $11u^2$ E) $13u^2$

98. En un tetraedro A - BCD, se trazan planos paralelos a las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, dichas aristas forman un ángulo cuya medida es α° . Calcule el área máxima de la sección determinada.

A) $\frac{(AB)(CD)}{4} \operatorname{sen} \alpha$

B) $\frac{(AB)(CD)}{8} \operatorname{sen} \alpha$

C) $\frac{(AB)(CD)}{6} \operatorname{sen} \alpha$

D) $\frac{(AB)(CD)}{2} \operatorname{sen} \alpha$

E) $\frac{(AB)(CD)}{12} \operatorname{sen} \alpha$

99. Un hexaedro regular se interseca por un plano que pasa por una de sus diagonales. Si la arista del cubo mide L unidades. Calcule el área mínima de la sección determinada.

A) $\frac{L^2 \sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{L^2 \sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{L^2 \sqrt{6}}{2}$

D) $\frac{L^2 \sqrt{6}}{3}$ E) $L^2 \sqrt{6}$

100. A través de cierto punto de la diagonal de un cubo cuya arista mide a unidades, se ha trazado un plano perpendicular a esta diagonal. Calcule las longitudes de los segmentos que se obtienen en la sección del plano con las caras del cubo, en función de la distancia x del plano secante al centro de simetría O del cubo.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2} (a\sqrt{3} - 2x)$ B) $\frac{\sqrt{6}}{4} (a\sqrt{3} - 2x)$

C) $\frac{\sqrt{2}}{3} (a\sqrt{3} - x)$

D) $\frac{\sqrt{6}}{2} (a - 2x)$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2} (a\sqrt{3} - 2x)$



CLAVES

1	B	26	D	51	A	76	C
2	B	27	A	52	C	77	E
3	C	28	C	53	C	78	A
4	C	29	E	54	E	79	D
5	A	30	B	55	E	80	D
6	C	31	D	56	C	81	C
7	E	32	A	57	D	82	D
8	B	33	D	58	B	83	B
9	E	34	A	59	A	84	C
10	A	35	D	60	C	85	C
11	D	36	C	61	A	86	A
12	D	37	A	62	B	87	D
13	D	38	B	63	A	88	A
14	A	39	E	64	B	89	C
15	B	40	D	65	B	90	A
16	D	41	E	66	C	91	C
17	C	42	E	67	D	92	C
18	C	43	A	68	C	93	A
19	D	44	A	69	B	94	B
20	A	45	B	70	C	95	B
21	C	46	A	71	A	96	B
22	E	47	B	72	A	97	D
23	C	48	E	73	B	98	A
24	E	49	A	74	C	99	C
25	B	50	B	75	C	100	E

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNIV. - UNIVERSIT

UNI - 2008 - II

PROBLEMA 01:

El área de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, es $32u^2$. Exteriormente se dibujan los triángulos equiláteros AEB y BFC. Si el área de la región triangular EBF es K veces el área de la región triangular ABC, calcule el valor de K.

A) $\frac{5}{6}$

B) $\frac{4}{5}$

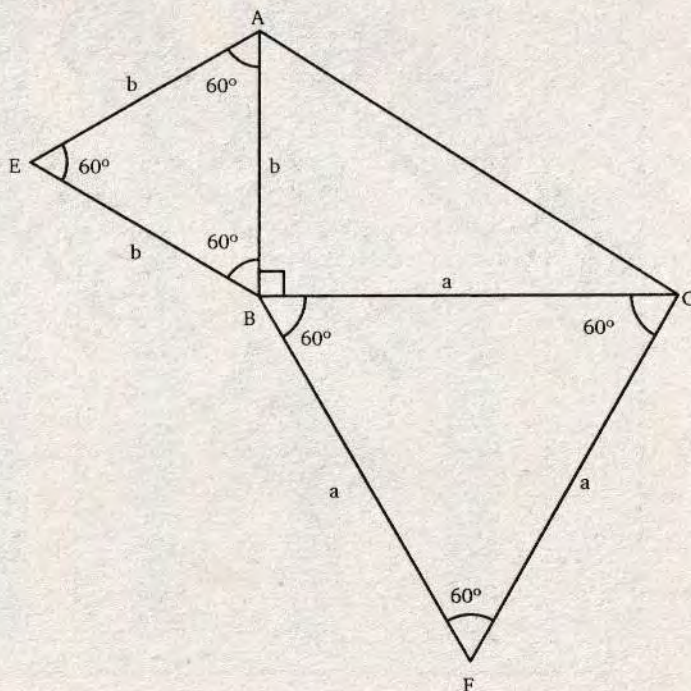
C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{2}{3}$

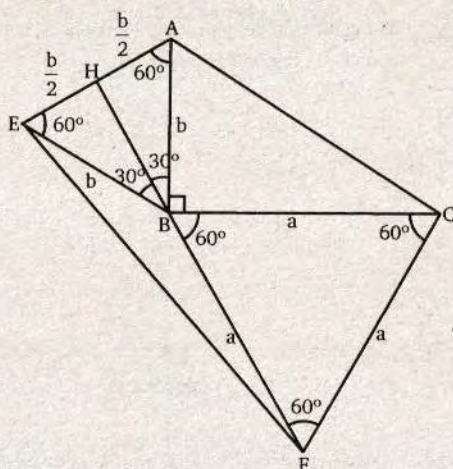
E) $\frac{1}{2}$

Resolución:

Del enunciado construimos la figura :



Si proyectamos FB hasta interceptar EA en H.



Por dato:

$$S_{\triangle ABC} = 32 \text{ u}^2$$

Del gráfico se deduce que el área de región triangular ABC:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} \quad \dots(1)$$

El área del triángulo EBF:

$$\begin{aligned} S_{\triangle EBF} &= S_{\triangle EHF} - S_{\triangle EHB} \\ &= \frac{1}{2} [\overline{EH} \times (\overline{HB} + \overline{BF})] - \frac{1}{2} (\overline{EH} \times \overline{HB}) \\ &= \frac{1}{2} \overline{EH} \times \overline{HB} + \frac{1}{2} \overline{EH} \times \overline{BF} - \frac{1}{2} \overline{EH} \times \overline{HB} \\ &= \frac{1}{2} \overline{EH} \times \overline{BF} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \right) \times a$$

$$= \frac{ab}{4} \quad \dots (2)$$

Por condición del problema . "el área de la región triangular EBF es K veces el área de la región triangular ABC"

$$S_{\triangle EBF} = K S_{\triangle ABC}$$

De (1) y (2):

$$\frac{ab}{4} = K \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 02:

Sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo acutángulo ABC se ubican los puntos D y E, respectivamente, de tal modo que $AD=BD=BE$ y $m\angle DEB = m\angle ABC$. Si las bisectrices de los $\angle BAC$ y $\angle ACB$ se cortan en P y $\angle EDC = 40^\circ$, entonces $m\angle CPA$ es:

A) 110

B) 115

C) 120

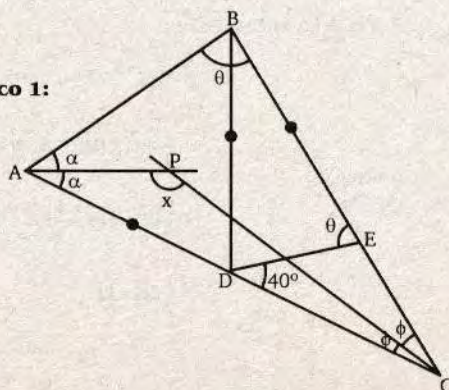
D) 125

E) 130

Resolución:

Grificando con datos del enunciado:

Gráfico 1:



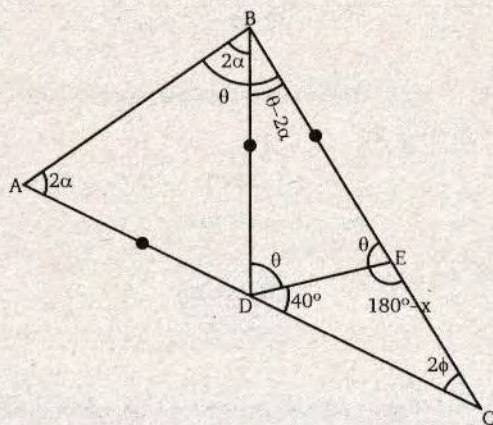
Como el triángulo BDE es isósceles, entonces:

$$m\angle BAD = m\angle ABD = 2\alpha$$

De igual manera en el triángulo isósceles ABD:

$$2\alpha = \theta$$

Gráfico 2:



En el triángulo ABD, por propiedad de ángulo exterior:

$$2\alpha + 2\alpha = \theta + 40^\circ$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\theta}{2} + 20^\circ \quad \dots(1)$$

En el triángulo BDE, por propiedad de ángulos agudos interiores:

$$\theta - 2\alpha + \theta + \theta = 180^\circ$$

$$3\theta - 2\alpha = 180^\circ$$

$$3\theta - \left(\frac{\theta}{2} + 20^\circ\right) = 180^\circ$$

$$\frac{5\theta}{2} = 200^\circ \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$2\alpha = \frac{80^\circ}{2} + 20^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ \quad \dots(3)$$

En el triángulo DEC, la suma de sus ángulos interiores:

$$40^\circ + (180^\circ - \theta) + 2\phi = 180^\circ$$

De (2):

$$40^\circ + 180^\circ - 80^\circ + 2\phi = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \phi = 20^\circ \quad \dots(4)$$

$$\alpha + x + \phi = 180^\circ$$

De(3)y(4):

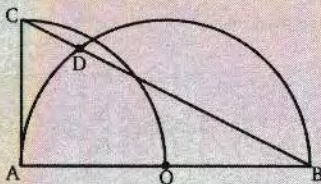
$$(30^\circ) + x + (20^\circ) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 130^\circ$$

Rpta.: E

PROBLEMA 03:

En la figura , $AO = 10$ cm , O y A son centros de circunferencias. Calcule CD en "cm".



A) $2\sqrt{5}$

B) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$

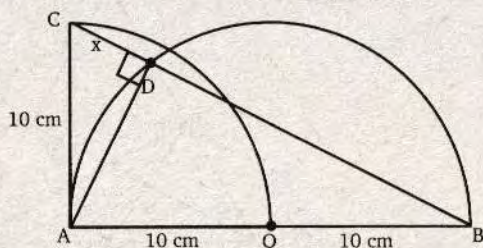
C) $2\sqrt{6}$

D) $\frac{8}{3}\sqrt{6}$

E) $2\sqrt{7}$

Resolución:

Según el enunciado se tiene la figura:



Por Pitágoras en el triángulo rectángulo ABC:

$$\overline{CB} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}$$

Por propiedad de triángulos rectángulos:

$$m\angle ABD = m\angle CAD \text{ y } m\angle DAB = m\angle DCA$$

Aplicando semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

$$\frac{x}{10\text{cm}} = \frac{10\text{cm}}{10\sqrt{5}\text{cm}} \Rightarrow x = 2\sqrt{5}\text{ cm}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 04: En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ ($E \in \overline{AB}$, $D \in \overline{BC}$). Si M es punto medio de $\overline{AC}$ y $m\angle EMD = 72$, entonces $m\angle MEC + m\angle ADM$ es:

A) 52

B) 53

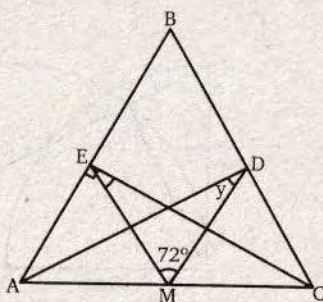
C) 54

D) 55

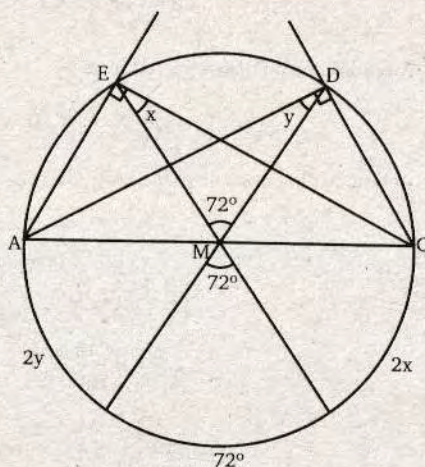
E) 56

Resolución:

Del enunciado graficamos:



Por propiedad de líneas inscritas en la circunferencia, donde AC es diámetro y C es centro.



Del gráfico deduce que:

$$2y + 72^\circ + 2x = 180$$

$$\Rightarrow x + y = 54^\circ$$

Rpta.: C

PROBLEMA 05: Un polígono regular de 9 lados está inscrito en una circunferencia. Si la suma de la longitud de la longitud de un lado y la longitud de la menor diagonal del polígono es 20, entonces la longitud de la mayor diagonal es:

A) 10

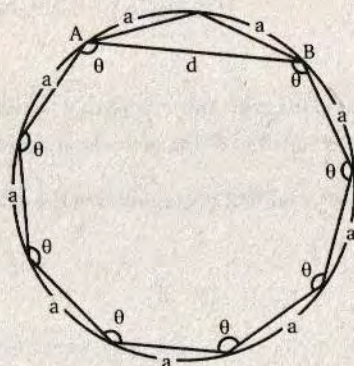
B) 12

C) 15

D) 17

E) 20

Resolución:



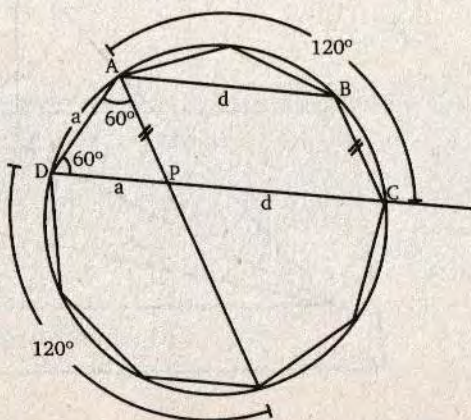
Dato : $a + d = 20$

Por teoría:

$$\theta = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

$$n = 9 : \Rightarrow \theta = \frac{180^\circ(9-2)}{9} = 140^\circ$$

Trazamos las dos diagonales de longitud máxima que se muestran:



Se forma el triángulo equilátero APD y el paralelogramo ABCP. Luego del gráfico podemos deducir que la longitud de la diagonal mayor DC es :

$$\overline{DC} = a + d$$

Dato:

$$= 20$$

Rpta.: E

PROBLEMA 06: Se tiene el triángulo ABC en el plano P. Se trazan BB' y CC' perpendiculares al plano P, el segmento B'C' no intersepta al plano P. Si $BB' = 3$, $CC' = 1$, $AC = \sqrt{17}$, $BC = \sqrt{14}$, y $m\angle BAB' = 30^\circ$, entonces el área del triángulo AB'C' es:

A) 3

B) $\frac{\sqrt{238}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{238}}{2}$

D) 8

E) 9

Resolución:

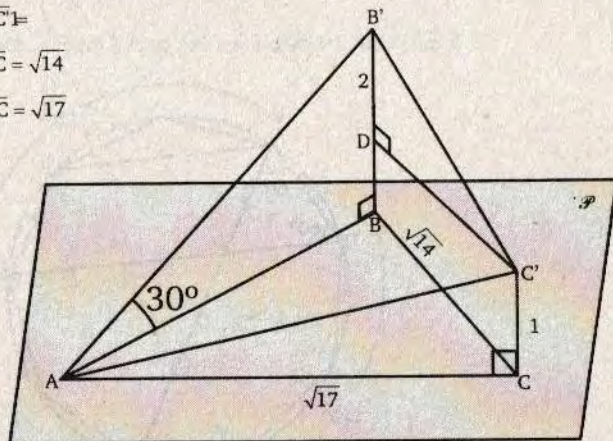
Graficamos según el enunciado, y considerando que $\overline{B'C'}$ no intersepta al plano P.

$$\overline{D'B} = 3$$

$$\overline{CC'} = 1$$

$$\overline{BC} = \sqrt{14}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{17}$$



En el triángulo rectángulo B'CD:

$$\overline{B'C'} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 + 2^2} = 3\sqrt{2} \quad \dots(1)$$

En el triángulo rectángulo AC'C:

$$\overline{AC'} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 1^2} = 3\sqrt{2} \quad \dots(2)$$

En el triángulo rectángulo AB'B:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{\overline{B'B}}{\overline{AB'}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{3}{\overline{AB'}} \Rightarrow \overline{AB'} = 6 \quad \dots(3) \end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye que el triángulo AB'C' es un triángulo isósceles:

En el triángulo rectángulo HB'C':

$$h = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3$$

El área del triángulo AB'C':

$$S_{\triangle AB'C'} = \frac{1}{2}(6 \times 3) = 9$$

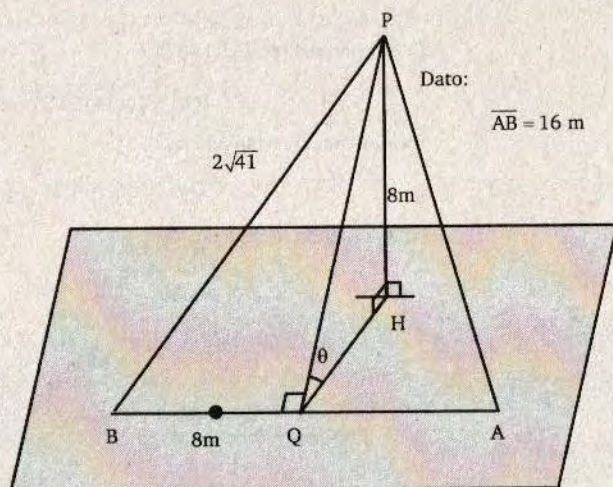
Rpta.: E

PROBLEMA 07: Un plano H contiene un segmento AB de longitud 16 m y P es un punto que dista de H 8 m. Si $AP=BP=2\sqrt{41}$, entonces la medida del diedro $\overline{AB}$ es:

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A) 37 | B) 50 | C) 53 |
| D) 55 | | E) 60 |

Resolución:

Graficamos según el enunciado:



En el triángulo rectángulo BPQ:

$$\begin{aligned}\overline{QP} &= \sqrt{\overline{BP}^2 - \overline{BQ}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{41})^2 - (8)^2} \\ &= \sqrt{4(41) - 64} \\ &= 10\end{aligned}$$

En el triángulo rectángulo PQH:

$$\begin{aligned}\overline{QH} &= \sqrt{\overline{QP}^2 - \overline{PH}^2} \\ &= \sqrt{(10)^2 - (8)^2} \\ &= 6; (\text{m})\end{aligned}$$

Entonces el triángulo PQH es un triángulo rectángulo notable de 37° y 53° , donde $\theta = 53^\circ$:

Luego el ángulo diedro AB es:

$$\theta = 53^\circ$$

Rpta.: C

PROBLEMA 08: Se tiene una esfera inscrita en un tronco de cilindro circular recto. Si el volumen de la región encerrada por el tronco es numéricamente igual a $(\sqrt{2} + 1)\pi$ y el ángulo que forma la base superior del tronco con su máxima generatriz es 45° , entonces el radio de la esfera es:

A) $\frac{1}{2}$

B) 1

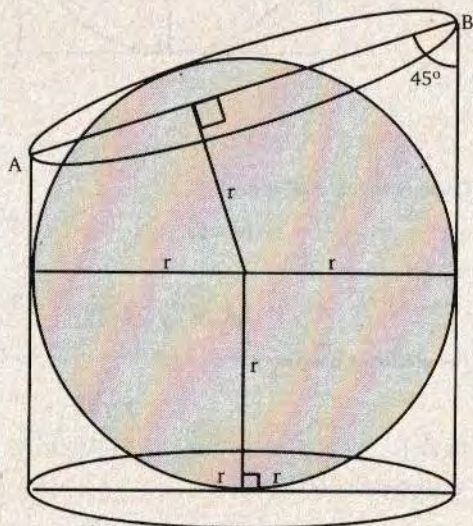
C) $\frac{3}{2}$

D) 2

E) $\frac{5}{2}$

Resolución:

Graficamos según el enunciado:

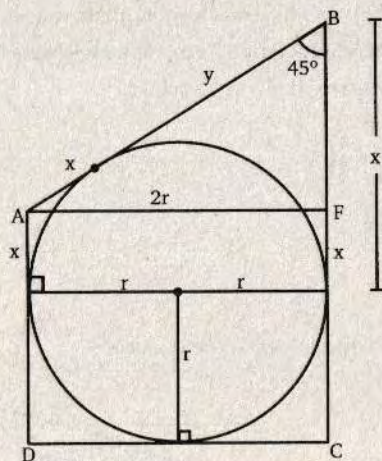


Dato : $V_T = (\sqrt{2} + 1)\pi$

El volumen de tronco de cilindro esta definido por:

$$V_T = \pi R^2 \left(\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \right)$$

En el cuadrilátero ABCD por propiedad decir cunferencia inscrita:



Como el ángulo ABF es de 45° :

$$\overline{BF} = 2r$$

También:

$$\overline{AB} = x + y = 2r(\sqrt{2})$$

Del gráfico se observa que:

$$y = \overline{BF} + x$$

De (2) :

$$y = 2r + x$$

Reemplazando (4) en (3):

$$x + (2r + x) = 2(\sqrt{2})r$$

$$\Rightarrow x = (\sqrt{2} - 1)r$$

Del gráfico también se deduce que:

$$\bullet \quad \overline{AD} = x + r = (\sqrt{2} - 1)r + r = \sqrt{2} r$$

$$\bullet \quad \overline{BC} = 2r + x + r = 3r + x = 3r + (\sqrt{2} - 1)r = (\sqrt{2} + 2)r$$

Reemplazando estos valores en (1):

$$V_T = \pi r^2 \left(\frac{(\sqrt{2})r + (\sqrt{2} + 2)r}{2} \right)$$

$$V_T = \pi r^2 (\sqrt{2} + 1)r$$

De dato:

$$(\sqrt{2} + 1)\pi = (\sqrt{2} + 1)\pi r^3$$

$$\Rightarrow r = 1$$

Rpta.: B

LIBROS

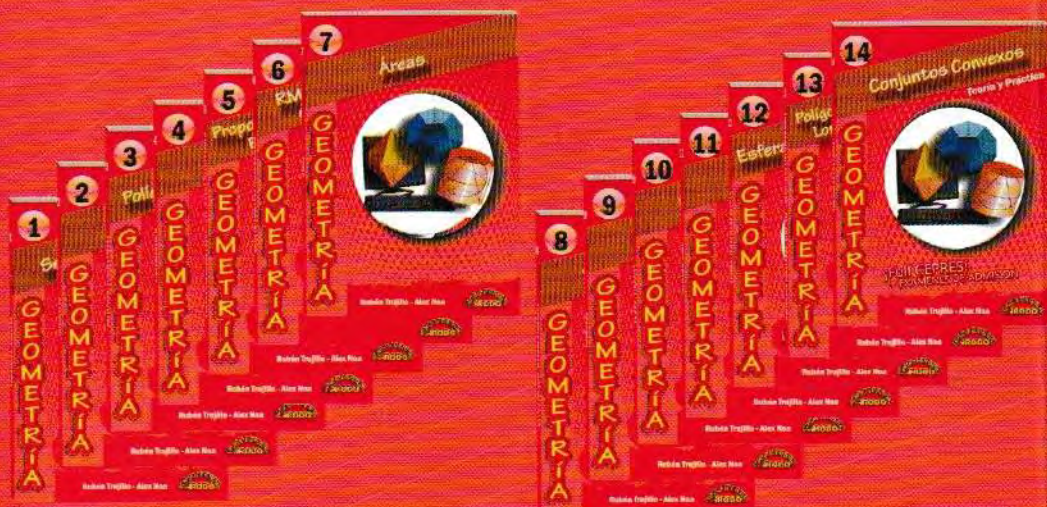


RESÚMENES TEÓRICOS



TEMAS SELECTOS





T. S.	TEMA
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación, Congruencia y Aplic.)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza Triángulos - R. M. Circunferencia
6	Relaciones Métricas en Triángulos y en Cuadriláteros
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedros y Triedros
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos

Teléfonos: 424 - 6350

992 - 796104



/ fondoeditorialrodo

editorialrodo@gmail.com